

AYUDANTÍA XI

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudantía estudiaremos productos de anillos y trabajaremos con el teorema chino de los restos. En lo que sigue usaremos la notación n para $\bar{n} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

1.- Problema 1:

Sea $A = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

- i.- Encuentre los elementos idempotentes de A .
- ii.- Descomponga $A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Desarrollo:

- i.- Observe que $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^2 = \{0, 1, 4, 16, 25, 6, 19, 12, 21, 10, 1, 24, 19, 16, 15\}$. Luego los elementos $\{6, 10, 15, 25, 21, 16\}$ son los únicos idempotentes no triviales del anillo A . Observe que A es conmutativo, por lo tanto los elementos anteriores son idempotentes centrales.
 - ii.- Observe que $6 + 15 + 10 = 1$ y además se tiene que $6 \cdot 15 = 0$, $10 \cdot 15 = 0$, $6 \cdot 10 = 0$. Luego, por el teorema de descomposición de anillos por elementos idempotentes, tenemos que $A \cong 6\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times 15\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times 10\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Pero por lo mostrado en la ayudantía anterior tenemos que si n, m son relativamente primos entonces $n\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Luego $A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Esto último pues $2\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Observe que $6 \in \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ corresponde en el producto de anillos a $(0, 1, 0)$. Esto pues el primer isomorfismo corresponde a la multiplicación por los elementos idempotentes centrales de cada clase en $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Por lo mismo $10 \in \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ corresponde en el producto de anillos a $(0, 0, 1)$ y $15 \in \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ corresponde a $(1, 0, 0)$.
- 1.- **Ejercicio:** Sea $B = \mathbb{C}[x]/(x^2 + 5x + 4)$. Pruebe que $B \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Usando esto encuentre un par de elementos idempotentes en B .

2.- Problema 2:

Sea $A = \mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$. Pruebe que $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(A)$ es un elemento invertible. Calcule su inverso.

Demostración: Observe que $T = \text{id} + B$, donde $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Además $B^2 = 9\text{id}$, luego $B^4 = 0$. Por lo tanto T es suma de un elemento invertible y otro nilpotente. Luego T es invertible. Además $(\text{id} + B)(\text{id} - B + B^2 - B^3) = (\text{id} - B + B^2 - B^3)(\text{id} + B) = \text{id} - B^4 = \text{id}$. De esto se sigue que $T^{-1} = (\text{id} - B + B^2 - B^3) = \begin{pmatrix} 10 & -30 \\ -30 & 10 \end{pmatrix}$.

- 2.- **Ejercicio:** Sea $A = \mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$. Pruebe que $T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(A)$ es un elemento invertible. Calcule su inverso.

3.- Problema 3:

Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo. Pruebe que en $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ todo elemento es invertible o nilpotente.

Demostración: Considere $n \in \mathbb{Z}$ un representante de la clase $\bar{n} \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Observe que si n y p^r son relativamente primos entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $an + p^rb = 1$. Luego $\overline{an} = 1$. Es decir, si p no divide a n se tiene que $\bar{n}$ es invertible. Por otro lado, si p divide a n entonces $n = ps$ cumple con $\bar{n}^r = \overline{p^r s^r} = \bar{0}$. Luego $\bar{n}$ es nilpotente. Esto demuestra lo pedido.

3.- Ejercicio: Sea A anillo conmutativo con uno. Pruebe $\mathfrak{N}(A) = \{a \in A : a^n = 0, \text{algún } n \in \mathbb{Z}\}$. Pruebe que $\mathfrak{N}(A)$ es un ideal de A . Calcule $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$, para p primo. Concluya que $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})/\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4.- Problema 4:

Sea $A = \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.

- i.- Demuestre que $A \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
- ii.- Sea K cuerpo. Pruebe que $\mathbb{M}_2(K)$ no es isomorfo a un producto de anillos.
- iii.- Concluya que en A hay solamente dos idempotentes centrales.

Desarrollo:

- i.- Observe que en $B = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ se tiene que $\{3, 4\}$ son un par de elementos idempotentes centrales. Luego dichos elementos descomponen B como $B \cong 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Considere ahora las matrices $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Observe que dichas matrices son centrales. Además $S^2 = S$, $T^2 = T$ y $T = \text{id} - S$. Luego estas matrices descomponen A como $A \cong A/TA \times A/SA$. Pero $TA = \mathbb{M}_2(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Luego $A \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
- ii.- Supongamos que $A \in \mathbb{M}_2(K)$ es idempotente no trivial. Luego dicho elemento, en cierta base apropiada, es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pero si consideramos $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que $AB = B$ y $BA = 0$. Luego A no es central. Por ello $\mathbb{M}_2(K)$ no tiene elementos idempotentes centrales no triviales. Luego $\mathbb{M}_2(K)$ no es un producto de anillos.
- iii.- Como $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ y $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ no son producto de anillos concluimos que estos no poseen elementos idempotentes no triviales. Luego tenemos que en A solamente existen dos elementos de este tipo.

5.- Problema 5:

Resuelva cada uno de los siguientes problemas.

- i.- Encuentre las soluciones de $x^2 \equiv -1(55)$.
- ii.- Resuelva el sistema: $2x + 3 \equiv 0(5)$, $2x + 5 \equiv 0(11)$.

Desarrollo:

- i.- Observe que $(-10)^2 = 100 = -10$. Luego $-10 = 45$ es un elemento idempotente central de $A = \mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$. Además 11 es otro elemento del mismo tipo. Por lo tanto $A \cong -10\mathbb{Z}/55\mathbb{Z} \times 11\mathbb{Z}/55\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Observe

que $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^2 = \{0, 1, 4, 9, 5, 3\}$. Luego $x^2 \equiv -1(11)$ no tiene solución a $x^2 \equiv -1(55)$. Esto pues si la hubiera, entonces cualquier x_0 solución de esta cumpliría con $(-10x_0)^2 \equiv -1(11)$.

- ii.- Resolvamos cada ecuación en cada cociente. En efecto $x \equiv 1(5)$ y $x \equiv -30 \equiv 3(11)$. Luego todo representante de una solución de la ecuación cumple con $x = 1 - 5n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $1 - 5n \equiv 3(11)$. Así obtenemos que $5n \equiv -2(11)$. Luego $n \equiv 4(11)$. Es decir $n = 4 + 11k$, para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $x = 1 - 5n = 1 - 20 + 55k = -19 + 55k$. Es decir $x \equiv -19(55) \equiv 26(55)$.
- 5.- **Ejercicio:** Encuentre las soluciones del sistema: $2x^2 \equiv 3(11)$, $5x + 4 \equiv 0(3)$.