AYUDANTÍA X

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudnatía estudiaremos anillos cocientes y homomorfismos de anillos. En lo que sigue haremos uso del primer y tercer teorema de isomorfía.

1.- **Problema 1:**
Sea A anillo conmutativo con uno y $a \in A$ un elemento cualquiera. Con sidere el anillo $A[x]$ de polinomios con coeficientes en A. Pruebe que $A[x]/(x-a) \cong A$.

Demostración: Considere el homomorfismo $\phi : A[x] \to A$ definido por $\phi(p(x)) = p(a)$. Tomando la imagen de los polinomios constantes bajo la función ϕ obtenemos que $\phi(A[x]) = A$. Observe que todo polinomio $q(x) = (x-a)t(x)$ cumple con que $q(a) = 0$. Luego $(x-a) \subset \ker(\phi)$. Demostremos la contensión contraria. Sea $p(x)$ un polinomio en $A[x]$. Como $x-a$ es mónico, podemos aplicar división de polinomios para escribir $p(x) = (x-a)q(x) + b$, donde $b \in A$. Luego si $p(x) \in \ker(\phi)$ tenemos que $b = p(a) = 0$. Por lo tanto $p(x) \in (x-a)$. Es decir $\ker(\phi) = (x-a)$. Por primer teorema de isomorfía concluimos que $A[x]/(x-a) \cong A$.

1.- **Ejercicio:** Pruebe que, bajo las hipótesis anteriores, $A[x]$ es un anillo conmutativo con uno.

1.- **Ejercicio:** Demuestre que si A es un anillo tal que todo elemento no nulo es invertible, entonces $A[x]/(a) \cong \{0\}$, para $a \neq 0$.

2.- **Problema 2:**
Considere el anillo $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\,,\ i^2 = -1\}$.
i.- Pruebe que $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$.
ii.- Demuestre que $\mathbb{Z}[i]/(1+i) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Desarrollo:
i.- Considere el homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ definido por $\phi(p(x)) = p(i)$. Tomando la imagen de los polinomios lineales bajo la función ϕ obtenemos que $\phi(\mathbb{Z}[x]) = \mathbb{Z}[i]$. Observe que todo polinomio $q(x) = (x^2+1)t(x)$ cumple con que $q(i) = 0$. Luego $(x^2+1) \subset \ker(\phi)$. Por otro lado, sea $p(x)$ un polinomio en $A[x]$. Como x^2+1 es mónico, podemos aplicar división de polinomios para escribir $p(x) = (x^2+1)q(x) + (ax+b)$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$. Luego si $p(x) \in \ker(\phi)$ tenemos que $ai + b = p(i) = 0$. Supongamos que $a \neq 0$, entonces $x = \frac{-b}{a} \in \mathbb{Q}$ cumple con $x^2 = -1$. Esto nos lleva a una contradicción. Por lo tanto $a = 0$ y luego $b = 0$. Así $(x^2+1) = \ker(\phi)$. Por el primer teorema de isomorfía concluimos que $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$.

ii.- Observe que $\mathbb{Z}[i]/(1+i) \cong \mathbb{Z}[x]/(1+x, x^2+1)$, ya que $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ y $(1+i) \cong (1+x, x^2+1)/(x^2+1)$. Donde ambos isomorfismos se establecen vía la evaluación en i. Luego:

$$\mathbb{Z}[i]/(1+i) \cong \left(\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)\right) / \left((1+x, x^2+1)/(x^2+1)\right).$$

Pero si usamos el tercer teorema de isomorfía:

$$\left(\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)\right) / \left((1+x, x^2+1)/(x^2+1)\right) \cong \mathbb{Z}[x]/(1+x, x^2+1).$$

Pero $(1+x, x^2+1) = (2, x+1)$, pues $2 = x^2+1-(x-1)(x+1)$. Por lo tanto:

$$\mathbb{Z}[i]/(1+i) \cong \mathbb{Z}[x]/(1+x, 2) = \mathbb{Z}[1+x]/(1+x, 2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Este último isomorfismo se obtiene evaluando en $u = x+2$.

2.- **Ejercicio:** Pruebe directamente que $\mathbb{Z}[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

2.- **Ejercicio:** Demuestre que en $A = \mathbb{Z}[i]/(i+2)$ todo elemento no nulo es invertible.

3.- **Problema 3:**
Sea B un anillo conmutativo con uno, tal que si $xy = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$. Este tipo de anillos se denomina **dominio de integridad**. Sea $\phi : \mathbb{Z} \to B$. Pruebe que B contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para p primo o bien B contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Demostración: Sabemos, por el primer teorema de isomorfiía, que $\mathbb{Z}/\ker(\phi)$ es isomorfo a un subanillo de B. Por otro lado $\ker(\phi)$ es un ideal de $\mathbb{Z}$. Luego $\ker(\phi) = n\mathbb{Z}$, para cierto $n \in \mathbb{Z}$ o $\ker(\phi) = \{0\}$. Si sucede lo segundo tenemos que B tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}$. Por otro lado, si $\ker(\phi) = n\mathbb{Z}$ y $n = st$, para $s, t \notin \{\pm 1\}$, entonces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es isomorfo a un subgrupo de B y $\overline{s}\overline{t} = \overline{0}$. Como B es dominio de integridad tenemos que $\overline{s} = \overline{0}$ o $\overline{t} = \overline{0}$. Sín perdida de generalidad $\overline{s} = \overline{0}$. Entonces $s = nu$. Luego en $\mathbb{Z}$ tenemos que $n = nus$, así $us = 1$. Luego $s \in \{\pm 1\}$. Esto nos lleva a una contracción. Por lo tanto n es un número primo. Es así como concluimos que B contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para cierto p primo.

4.- **Problema 4:** Sea B un dominio de integridad finito. Pruebe que todo elemento no nulo en B es invertible.

Desmostración: Sea $b \in B$ elemento no nulo. Considere la función $\phi : B \to B$ definida por $\phi(a) = ba$. Observe que $\phi(a+c) = b(a+c) = \phi(a)+\phi(c)$. Luego ϕ es un homomorfismo de grupos. Observe que $\ker(\phi) = \{a \in B : ba = 0\} = \{0\}$, pues B es dominio de integridad. Luego ϕ es un homomorfismo inyectivo. Como B es un conjunto finito, se tiene que ϕ es sobreyectivo. Es así como existe $a \in A$ tal que $ab = ba = 1$. Luego todo elemento no nulo en B es invertible.

5.- **Problema 5:**
Sea $A \subseteq B$ subanillo e $I \subseteq B$ un ideal.

i.- Pruebe que I es ideal de $A + I$ y que $I \cap A$ es un ideal de A.
ii.- Demuestre que $A + I/I \cong A/(A \cap I)$.
iii.- Concluya que si $n, m \in \mathbb{Z}$ son relativamente primos entonces $n\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Desarrollo:

i.- Observe que I es un anillo contenido en $A+I$. Por ende I es subanillo de $A+I$. Por otro lado para todo $r \in A+I$ y $s \in I$ tenemos que $r \in B$. Luego $rs, sr \in I$. Por lo tanto I es ideal de $A+I$. Por otro lado $A \cap I$ es un anillo contenido en A. Luego $A \cap I$ es un subanillo de A. Considere $r \in A$ e $i \in A \cap I$, entonces $ri, ir \in A \cap I$, pues cada elemento está en A e I. Luego $A \cap I$ es un ideal de A.

ii.- Considere el homomorfismo $\phi : A+I \to A/(A\cap I)$ definido por $\phi(a+i) = \overline{a}$. Observe que ϕ está bien definido pues si $a+i = b+j$, con $a, b \in A$, $i, j \in I$ entonces $a - b = j - i \in A \cap I$. Luego $\phi(a+i) = \overline{a} = \overline{b} = \phi(b+j)$. Claramente ϕ es sobreyectivo. Por último, tenemos que $\ker(\phi) = \{a+i \in A+I : \overline{a} = 0\} = \{a+i \in A+I : a \in I\} = I$. Concluimos por primer teorema de isomorfía que $A+I/I \cong A/(A\cap I)$.

iii.- Considere $I = (m)$, $A = (n)$ como en la parte [i]. Entonces $(n)+(m) = (1)$, pues existe una combinación lineal entera de la forma $ns+mt = 1$. Además $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = nm\mathbb{Z}$, pues n y m no tienen factores comunes. Luego por [ii] tenemos que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$.

5.- **Ejercicio:** Pruebe que $n\mathbb{Z}/mcm(n,m)\mathbb{Z} \cong mcd(n,m)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Concluya que $mdc(n,m)mcm(n,m) = nm$.

6.- **Problema 6:**
Sea I ideal de A.

i.- Pruebe que $I = A$ si y solamente si $A/I \cong \{0\}$.

ii.- Encuentre condiciones necesarias y suficientes sobre $a, b \in \mathbb{C}$ para que $(x-a)+(x-b) = \mathbb{C}[x]$.

Desarrollo:

i.- Sabemos que $A/I \cong \{0\}$ si y solamente si todo $a \in A$ cumple con $\overline{a} = \overline{0}$, es decir si y solamente si $a \in I$.

ii.- Por [i] debemos encontrar condiciones necesarias y suficientes para que $I = (x-a)+(x-b)$ cumpla con $\mathbb{C}[x]/I = \{0\}$. Observe que si $a = b$ entonces $I = (x-a)$. Por lo tanto $\mathbb{C}[x]/I \cong \mathbb{C} \neq \{0\}$. Luego $I \neq \mathbb{C}[x]$. Por otro lado si $a \neq b$ tenemos que $(a-b) \subset I$. Pero $1 = (a-b)^{-1}(a-b) \in I$. Es por ello que $\mathbb{C}[x] \subset I$. Luego $I = \mathbb{C}[x]$. Concluimos que $(x-a)+(x-b) = \mathbb{C}[x]$ si y solamente si $a \neq b$.