AYUDANTÍA IX

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudnatía comenzaremos a trabajar con la estructura de anillo. Veremos algunos ejemplos de anillos e ideales.

1.- **Problema 1:**
Sea $A = \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ y considere $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x, y, z, w \in 2\mathbb{Z} \right\}$.

i.- Pruebe que B es un anillo.

ii.- Pruebe que B es un ideal de A.

Desarrollo:

i.- Demostremos que B es subanillo de A. Observe que B es no vacio dado que $O_{2\times 2} \in B$. Ahora bien, si consideramos dos matrices $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{2}, Y = (y_{ij})_{i,j=1}^{2} \in B$ entonces sus coeficientes cumplen con $x_{ij} \in 2\mathbb{Z}$ e $y_{ij} \in 2\mathbb{Z}$. Luego $(X \pm Y)_{ij} = x_i j \pm y_i j \in 2\mathbb{Z}$. Por lo tanto B es subgrupo de A. Por otro lado $(XY)_{ij} = \sum_{r=1}^{2} x_{ir} y_{rj} \in 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$. Por ello B es subanillo de A.

ii.- Observe que lo dicho en [i] prueba que si tomamos $Z \in A$ y $A \in B$ entonces $ZX \in B$, $XZ \in B$.

1.- **Ejercicio:** Sea $A = \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ y considere:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : y, z, w \in \mathbb{Z} \ , x \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Pruebe que B no es un ideal de A.

2.- **Problema 2:**
Sea $A = \mathbb{Q}[x]$ en anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$ y considere el ideal $J = (x^2 - 1, x^2 - 3x + 2)$.

i.- Pruebe que $J = (x - 1)$.

ii.- Concluya que $(x^2 - 1) \subsetneq J$.

Desarrollo:

i.- Observe que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ y que $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. Por lo tanto todo elemento $v = p(x)(x^2 - 1) + q(x)(x^2 - 3x + 2)$ se reescribe como $v = s(x)(x - 1)$. Luego $J \subset (x - 1)$. Probemos que de hecho son el mismo conjunto. Observe que $1 = \frac{1}{3}(x + 1) - (x - 2)$, luego $(x - 1) = \frac{1}{3}[(x^2 - 1) - (x^2 - 3x + 2)]$. Por lo tanto $x - 1 \in J$. Luego $J = (x^2 - 1)$.

ii.- Observe primero que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \in J$. Por lo tanto $(x^2 - 1) \subset J$. Supongamos que $J = (x^2 - 1)$ entonces existe un polinomio $t(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $x - 1 = q(x)(x^2 - 1)$ es decir $1 = q(x)(x + 1)$. Igualando en el grado a ambos lados de la ecuación anterior llegamos a una contradicción. Por lo tanto $(x^2 - 1) \subsetneq J$.

2.- **Ejercicio:** Pruebe que en $\mathbb{Q}[x]$ se tiene que los ideales $(p(x)), (q(x))$ son iguales si y solamente si $p(x) = aq(x)$, para cierto $a \in \mathbb{Q}^*$.

3.- **Problema 3:**
Sea $A = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ el anillo de funciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. Considere $B = \{T \in A : T(e_1) = 0\}$, donde $e_1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$.

i.- Demuestre que B es un anillo.

ii.- ¿Es B un ideal bilátero de A?

iii.- Pruebe que $B \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Desarrollo:

i.- Obsevre que $T = 0$, la transformación lineal nula, es un elemento de B. Además si $T, S \in B$ entonces $T(e_1) = S(e_1) = 0$. Luego $T \pm S(e_1) = 0$. Por lo tanto B es un subgrupo abeliano de A. Considere ahora $T, S \in B$ entonces $S \circ T(e_1) = S(0) = 0$. Por lo tanto B es un subanillo de A. Luego B es un anillo.

ii.- Considere S una tranformación lineal cualquiera. Entonces si $T \in B$ se tiene que $S \circ T(e_1) = S(0) = 0$. Luego B es un ideal izquierdo de A. Por otro lado si consideramos las tranformaciónes lineales $T(x,y) = (0,y)$ y $S(x,y) = (y,x)$ tenemos que $T \circ S(e_1) = T(e_2) = e_2 \neq 0$. Por lo tanto B no es ideal derecho de A. Luego B no es ideal bilátero de A.

iii.- Considere $\beta = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que fijando una base, existe una correspondencia biunívoca entre matrices y transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. Además esta correspondecia respeta la suma y el producto de ambos anillos. Por lo tanto dicha función es un isomorfismo de anillos. Si a cada transformación $T \in B$ asociamos su matriz tenemos que $[T] = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Esto se debe a que $T(e_1) = 0.e_1 + 0.e_2$ y $T(e_2)a.e_1 + b.e_2$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Luego $B \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

4.- **Problema 4:**
Sea $A = \mathbb{R}[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$. Considere $C = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = p'(0) = 0\}$.

i.- Pruebe que C es un ideal de A.

ii.- Pruebe que $C = (x^2)$.

Desarrollo:

i.- Claramente el polinomio nulo es un elemento de C. Considere $p(x), q(x) \in C$ entonces $(p \pm q)(0) = 0$ y $(p+q)'(0) = 0$. Por lo tanto B es un subgrupo de A. Observe que A es un anillo conmutativo, por lo tanto si C es ideal por izquierda tenemos que este es ideal bilátero. En efecto, si consideramos $q(x) \in A$ tenemos que $pq(0) = 0$ y $(pq)'(0) = p'(0)q(0) + p(0)q'(0) = 0$. Por lo tanto $pq(x) \in C$. Luego C es un ideal de A.

ii.- Observe que si tenemos $p(x) = x^2 q(x)$ entonces $p(0) = 0$ y $p'(x) = x^2 q'(x) + 2xq(x)$, por lo tanto $p'(0) = 0$. Luego $(x^2) \subset C$. Por otro lado si tomamos un polinomio cualquiera $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in C$, entonces

$0 = p(0) = a_0$ y $a_1 = p'(0) = 0$. Luego $p(x) = x^2(a_2 + a_3x + \cdots + a_nx^{n-2})$. Luego $C \subset (x^2)$. Es así como $C = (x^2)$.

4.- **Ejercicio:** Pruebe que $C_k = \left\{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p^{(i)}(0) = 0, \forall i \leq k\right\}$ es un ideal de $\mathbb{R}[x]$. Pruebe además que $C_k = (x^{k+1})$.

5.- **Problema 5:**
Sea $A = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ el anillo de matrices con coeficientes reales y considere I ideal de A tal que $E_{11} \in I$, donde E_{ij} es la matriz elemental con un uno en la entrada ij y ceros en las restantes. Pruebe que $I = A$.

Demostración: Observe que si tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $r \in I$ entonces $\lambda r = (\lambda \mathrm{id})r \in I$. Por lo tanto I es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Luego para demostrar que $I = A$ basta probar que $E_{ij} \in I$, $\forall i, j \in \{1, 2\}$. En efecto $E_{12} = E_{11}E_{12} \in I$ y $E_{21} = E_{21}E_{11} \in I$. Por lo tanto $E_{11}, E_{12}, E_{21} \in I$. Finalmente, como $E_{22} = E_{21}E_{12} \in I$, concluimos que $A = I$.

5.- **Ejercicio:** Sea $A = \mathbb{M}_2(K)$, donde $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Pruebe que si I es un ideal no nulo en A entonces $A = I$.