AYUDANTÍA VIII

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudnatía trabajaremos con ejemplos geometricos de acciones de grupos.

1.- **Problema 1:**
Sea G el grupo de movimientos rigidos (rotaciones) del dodecaedro y T el grupo simetrias del dodecaedro considerando las reflexiones.

i.- Calcule $|G|$.

ii.- Calcule $|T|$.

iii.- Asumiendo que $Z(A_5) = \{id\}$ y que $G \cong A_5$ pruebe que $T \cong A_5 \times C_2$.

Desarrollo:

i.- Considere la acción de G sobre las caras del dodecaedro regular. Esta acción es transitiva pues dejando una cara fija podemos llevar mediante rotaciones una cara vecina de esta a cuaquiera de sus otros 4 homologos. Luego una cara esta en una orbita si y solamente si esta su vecina. Esto implica que la acción sea transitiva. Por lo tanto si usamos la identidad:

$$|G/Stab_G(x)| = |Orb(x)|,$$

tenemos que $|G| = 12|Stab_G(x)|$. Por otro lado si dejamos una cara fija tenemos 5 rotaciones posibles del dodecaedro. Luego $|Stab_G(x)| = 5$. Por lo tanto $|G| = 60$.

ii.- Repetimos la misma acción que en [i]. Como $T \supset G$ tenemos que esta acción es también transitiva. Luego tenemos que $|T| = 12|Stab_T(x)|$. Pero si dejamos una cara fija entonces tenemos que el subgrupo de simetrias que del dodecaedro que cumplen con esto es isomorfo a D_{10}. Por lo tanto $|G| = 120$.

iii.- Considere $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Observe que la matriz A corresponde a la composición de las reflexiones respecto al eje x, y y z. Luego $A \in T$. Recordemos que todo elemento de T se puede ver como una única matriz en $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, pues dichos elementos corresponden a rotaciones en el espacio. Observe que A conmuta con todos los elementos de T, por ser un multiplo de la identidad. Luego $\langle A \rangle \cap G = \{id\}$, pues $Z(G) \cong Z(A_5) = \{id\}$. Por otro lado $[T : G] = 2$, así $G \triangleleft T$. Observe que siempre $\langle A \rangle \triangleleft G$. Además $|\langle A \rangle||G| = |T|$. Concluimos que $T \cong G \times \langle A \rangle \cong A_5 \times C_2$.

1.- **Ejercicio:** Pruebe que $Z(A_5) = \{id\}$.

2.- **Problema 2:**
Sea G el grupo de movimientos rigidos del tetraedro. Calcule $|G|$.

Desarrollo: Considere la acción de G sobre las caras del tetraedro regular.

Esta acción es transitiva. Luego si usamos que $|G/Stab_G(x)| = |Orb(x)|$ obtenemos que $|G| = 4|Stab_G(x)|$. Por otro lado si dejamos una cara fija tenemos 3 rotaciones posibles del dodecaedro. Luego $|Stab_G(x)| = 3$. Por lo tanto $|G| = 12$.

3.- **Problema 3:**
Determine de cuantas maneras esencialmente distintas se puede pintar con n colores un triangulo equilatero hecho de palitos de helado.

Desarrollo: Considere la acción de $G = D_3$ en el conjunto de todas las coloraciones posibles, con n colores, del triangulo equilatero. Sea X dicho conjunto. Entonces debemos calcular $|G \setminus X|$. Para ello usaremos la identidad $|G \setminus X| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$. Observe que en G está compuesto por 2 rotaciones de orden 3, la identidad y 3 reflexiones que cruzan un vertice y un lado. Observe que toda rotación de orden 3 cumple que un elemento de X es fijo por el si tiene los mismos colores en todas las aristas. Por otro lado toda reflexión que cruza un lado y un vértice cumple que un eleemnto de X es fijo por el si tiene los mismos colores en las aristas que permuta dicha reflexión. Por lo tanto tiene 2 aristas de igual color y la tercera de cualquier color. Por lo tanto:

$$|G \setminus X| = \frac{1}{6}(n^3 + 2n + 3n^2).$$