AYUDANTÍA VI

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudantía trabajaremos ejemplos de acciones de grupos sobre si mismos, de forma tal de deducir nueva información de los grupos en cuestión.

1.- **Problema 1:**
Sea G un grupo de orden p^n, para cierto $n \in \mathbb{N}$ y p primo. Considere la acción de G sobre si mismo por conjugación.
i.- Demuestre que $\{x \in G : Orb(x) = \{x\}\} = Z(G)$.
ii.- Concluya que $Z(G) \neq \{e\}$.
iii.- Encuentre un grupo no abeliano de orden p^n, para cierto $n \in \mathbb{N}$ y p primo.

Desarrollo:
i.- Observe que $Orb(x) = \{gxg^{-1} \in G : g \in G\}$. Luego $Orb(x) = \{x\}$ si y solamente si $gxg^{-1} = x$, pata todo $g \in G$. Esto último es equivalente a que $x \in Z(G)$. Luego $\{x \in G : Orb(x) = \{x\}\} = Z(G)$.

ii.- Sabemos que toda acción de un grupo en un conjunto particiona dicho conjunto en orbitas. En nuestro caso, como G actúa en si mismo por conjugación tenemos que $|G| = |O_1| + \cdots + |O_k|$, donde $|O_i|$ son las diferentes orbitas que genera G. Observe que un elemento tiene orbita trivial si y solamente si es un elemento del centro, luego tenemos que $|G| = |Z(G)| + |O_{i_1}| + \cdots + |O_{i_k}|$, donde $|O_{i_l}| \neq 1$. Por otro lado sabemos que $|O_{i_l}| = |G|/|Stab_G(x_{i_l})|$, donde x_{i_l} es un elemento cualquiera de O_{i_l}. Luego $|O_{i_l}| = p^{s_{i_l}}$, para cierto $s_{i_l} \neq 0$. Por lo tanto p divide a $|G| - (|O_{i_1}| + \cdots + |O_{i_k}|)$. Concluimos que p divide a $|Z(G)|$. Luego $Z(G)$ no es trivial.

iii.- Considere $G = D_8 = \langle r, s : r^4 = s^2 = 1, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$. Sabemos que $Z(G) = \{1, r^2\}$. Por lo tanto G es un grupo de orden 2^3 no abeliano.

1.- **Ejercicio:** Demuestre que para acción anterior $C_G(x) = Stab_G(x)$.

1.- **Ejercicio:** Demuestre que todo grupo de orden p^2 es abeliano

2.- **Problema 2:** Considere la acción de $G = S_3$ sobre G por conjugación. Calcule el número de órbitas de dicha acción.

Desarrollo:
Partamos por considerar las órbitas más elementales. En efecto, observe que $\sigma(id)\sigma^{-1} = id$, $\forall \sigma \in G$. Luego $Orb_G(id) = \{id\}$.

Por otro lado el largo de cualquier permutación es la misma que la de su conjugado. Así $Orb_G((123)) \subseteq \{(123), (132)\}$. Pero $(12)(123)(12)^{-1} = (12)(123)(12) = (132)$. Luego $Orb_G((123)) = \{(123), (132)\}$.

Por último calculemos la órbita de la permutación (13). Recordemos que $(ab)^{-1} = (ab)$. Luego como $(12)(13)(12) = (23)$, $(12)(23)(12) = (13)$ y $(23)(13)(23) = (12)$ tenemos que $Orb_G((13)) = \{(12), (13), (23)\}$.

Finalmente concluimos que existen 3 clases de conjugación.

2.- **Ejercicio:** Calcule el numero de clases de conjugación en S_4.

3.- **Problema 3:** Sea G un grupo de orden n y S_n es el grupo de biyecciones de n elementos. Demuestre que existe un homomorfismo inyectivo $\varphi : G \to S_n$.

Demostración: Considere la acción de G sobre G vía $g.h = gh$, $\forall g, h \in G$. Esta acción de grupo induce un homomorfismo $\rho : G \to Biy(G)$ donde $\rho(g) = \sigma_g$, para $\sigma_g(h) = g.h = gh$. Observe que como $|G| = n$ tenemos que $Biy(G) \cong S_n$. Además $\ker(\rho) = \{g \in G : gh = 1, \forall h \in G\}$ tomando $h = 1$ tenemos que $\ker(\rho) = \{1\}$. Por lo tanto $\rho : G \to S_n$ es un homomorfismo inyectivo.

3.- **Ejercicio:** Demuestre que C_3 puede ser visto como un subgrupo normal de S_3.

4.- **Problema 4:** Muestre que si un grupo G cumple con $|G| = n$ y p es el menor primo que divide a n.

i.- Demuestre que todo subgrupo de índice p es normal en G.

ii.- Concluya que si $H \leq G$ tal que $[G : H] = 2$ entonces $H \triangleleft G$.

iii.- Pruebe que $A_3 = \{id, (123), (132)\}$ es un subgrupo normal de S_3.

Desarrollo:

i.- Sea $H \leq G$ con $[G : H] = p$ primo. Considere la acción de G sobre $X = G/H$ conjunto de cosetos de H, vía:

$$g.(aH) = (ga)H.$$

Esta acción induce un homomorfismo $\pi_H : G \to Biy(X)$, donde $\pi_H(g) = \sigma_g$, donde $\sigma_g(aH) = g.(aH) = (ga)H$. Observe que:

$$\ker(\pi_H) = \{g \in G : gaH = aH, \forall a \in G\}.$$

Es decir $g \in \ker(\pi_H)$ sí y solamente sí $(a^{-1}ga)H = H$ para cualquier $a \in G$, lo que equivale a que $(a^{-1}ga) \in H$, $\forall a \in G$. Así $K = \ker(\pi_H) = \cap_{a \in G} aHa^{-1}$.

Observe que $K \triangleleft G$ por ser núcleo de un homomorfismo. Además $K \subset H = eHe^{-1}$.

Sea $l = [H : K]$, así $[G : K] = [G : H][H : K] = pl$. Como X tiene p cosetos, tenemos que $G/K \hookrightarrow S_p$, donde S_p es el grupo de biyecciones de p elementos. Luego $pl = [G : K] | p!$, por lo tanto $l | (p-1)!$. Por otro lado, como p es el primo más pequeño que divide a $|G|$, tenemos que $l = 1$.

Finalmente $H = K \triangleleft G$.

ii.- Si $H \leq G$ tal que $[G : H] = 2$ como 2 es el primo más pequeo el resultado se sigue de la parte anterior.

iii.- Observe que $|A_3| = 3$ y $|S_3 = 6|$, luego $[S_3 : A_3] = 2$ y el resultado se sigue de lo expuesto en [ii].