Control 5 - Pauta

CÁLCULO II
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudantes: José Aburto - Madelaine Ramirez
09 de enero, 2017

1. Sea una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0 < a_n < M$ para cierto $M \in \mathbb{R}$ positivo, y todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge también.

   Demostración. Definimos la función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{x}{1+x}$ para todo $x \in [0,\infty)$. Notemos que $f(0) = 0$ y además que:

   $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

   y que como:

   $$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -\frac{2x+2}{(x+1)^4} < 0, \text{ para } x \in [0,\infty)$$

   se tiene que $f'(x)$ es decreciente. Además, por el teorema del valor medio, para $x \in (0,\infty)$ existe $\theta_x \in (0,x)$ tal que

   $$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta_x)x,$$

   es decir,

   $$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{(1+\theta_x)^2}x.$$

   Como $0 < a_n < M$, y dado que $f'(x)$ es decreciente, de la última igualdad obtenemos que:

   $$\begin{aligned}\frac{a_n}{1+a_n} &= \frac{1}{(1+\theta_n)^2}a_n \\ &\geq \frac{1}{(1+M)^2}a_n,\end{aligned}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por el criterio de comparación, concluímos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. $\square$

2. Sea una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Demuestre que:

a) Si $l < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $l > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Por definición, como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, tenemos que: $\forall \epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\sqrt[n]{a_n} - l| < \epsilon$, para $n \geq N$. En particular, $\sqrt[n]{a_n} < \epsilon + l$.

a) Si $l < 1$, consideremos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon + l < 1$. Luego, para todo $n \geq N$, tenemos que $\sqrt[n]{a_n} < \epsilon + l$, y por crecimiento de la potencia a la n, obtenemos la desigualdad $a_n < (\epsilon + l)^n$, y de esta manera, dado que son términos positivos usamos el criterio de comparación obteniendose:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} (\epsilon + l)^n ,$$

siendo esta última una serie geométrica convergente pues $\epsilon + l < 1$. Por lo tanto, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es una serie convergente, y como le sumamos una cantidad finita de términos, se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Si $l > 1$ consideramos la desigualdad $-\epsilon < \sqrt[n]{a_n} - l$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $l - \epsilon > 1$, luego para todo $n \geq N$, tenemos que $l - \epsilon < \sqrt[n]{a_n}$ y por crecimiento de la potencia a la n obtenemos la desigualdad $(l - \epsilon)^n < a_n$, y por criterio de comparación:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (l - \epsilon)^n < \sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

donde la primera serie es divergente pues es una serie geométrica con $l - \epsilon > 1$. Y como sumamos solamente términos positivos, obtenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

□

3. Para cada una de las siguientes series determine si son convergentes o divergentes:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} (n\theta^n)^n$, con $|\theta| < 1$.

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-n^2-1}{n+1}}$.

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Demostración. *a*) Usaremos el criterio de cuociente. En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)/(n+1)^{n+1}}{1/n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^n}{1/n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e},
\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{e} < 1$ pues $e > 1$, y por lo tanto la serie es convergente.

b) Usaremos el criterio de la raíz n-ésima. Dado que los términos de la serie son estrictamente positivos y dado que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n\theta^n)^n} &= \lim_{n\to\infty} n\theta^n \\ &= 0 < 1, \end{aligned}$$

pues $|\theta| < 1$. De esta manera, obtenemos que la serie es convergente.

c) Usaremos el criterio de la raíz n-ésima. Dado que los términos de la serie son estrictamente positivos y dado que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\frac{-n^2-1}{n+1}}} &= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n^2+1}{n^2+n}} \\ &= e^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

d) Notemos que podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Además, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donde $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para que por el criterio de Leibiniz esta serie sea convergente, basta probar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es monótona. En efecto,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0,$$

para $x > 0$. Por lo tanto, la serie es convergente.

$\square$