Control 4 - Pauta

CÁLCULO II
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudantes: José Aburto - Madelaine Ramirez
19 de diciembre, 2016

1. Estudie la convergencia de:

   a) La serie:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{1}{n}\right)$$

   b) La serie:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{456}}$$

Demostración. *a*) Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \cosh\left(\frac{1}{n}\right) = \cosh(0) = 1$ por continuidad de la función cosh. Luego, por criterio del resto, dado que este límite no es cero, la serie no es convergente.

b) Notemos que
$$\frac{1}{n^{456}} \leq \frac{1}{n^2}$$
y dado que $\sum_{n=1}^{\infty}$ es convergente, por el criterio de comparación, concluímos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{456}}$ es convergente.

□

2. Estudie la convergencia de la siguiente serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\left(\frac{2^n}{3^n+4^n}\right).$$

Demostración. Notemos que
$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\left(\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)\right| &\leq \frac{2^n}{3^n+4^n}\\ &= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2^n}\\ &< \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\left(\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)\right|$ converge absolutamente por el criterio de comparación, pues $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica que converge. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\left(\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)$ converge. $\square$

3. Determine la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)c_n}{(\sin(n\pi)+2)e^n}$$

donde

$$c_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es un cuadrado perfecto} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ no es un cuadrado perfecto.} \end{cases}$$

Demostración. Primero notemos que $|(\sin(n\pi)+2)| \leq 1$, ya que:

$$\begin{aligned} |(\sin(n\pi)+2)| &\leq |\sin(n\pi)| + |2| \\ &\leq 1+2. \end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$\left|\frac{\cos(n!)c_n}{(\sin(n\pi)+2)e^n}\right| \leq \left|\frac{c_n}{e^n}\right|.$$

Y notemos que $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donde la sucesión $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona. Además, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ es una serie geométrica convergente pues $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$. Por el criterio de Dirichlet obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_n}{e^n}\right|$ converge.
Finalmente, por el criterio de comparación se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)c_n}{(\sin(n\pi)+2)e^n}$ converge absolutamente, y por lo tanto, converge. $\square$