Taller 1

CÁLCULO II
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudantes: José Aburto - Madelaine Ramirez
15 de Diciembre, 2016

1. *a*) Demuestre que la siguiente serie converge si $|x| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + 1}{\sqrt{n} + \log n + 2} x^n. \tag{1}$$

b) Calcule el siguiente límite:

$$\text{lím}\, n \to \infty \frac{\log n + 1}{2^n\sqrt{n} + 2^n \log n + 2^{n+1}}. \tag{2}$$

Demostración. *a*) Consideremos la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\log n + 1}{\sqrt{n} + \log n + 2} x^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + 1}{\sqrt{n} + \log n + 2} |x|^n. \tag{3}$$

Dado que $\log n + 1 < \sqrt{n} + \log n + 2$ se tiene que $0 < \frac{\log n+1}{\sqrt{n}+\log n+2} < 1$, y por lo tanto se consigue la desigualdad:

$$\frac{\log n + 1}{\sqrt{n} + \log n + 2} |x|^n < |x|^n,$$

y usando el criterio de comparación, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ converge pues es una serie geoétrica con $|x| < 1$, se obtiene que la serie en (3) converge, es decir, la serie en (1) converge absolutamente, y por lo tanto converge.

b) Dado que la serie (1) converge, por el criterio del resto se tiene que el límite en (2) converge a 0.

□

2. Sea $q \in \mathbb{R}$ tal que $|q| < 1$.

a) Demuestre que:

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1 - q},$$

con $k \geq 0$.

b) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$.

Demostración. *a*) Tenemos que haciendo el cambio de variable $m = n-k$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} q^n &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=k}^{N} q^n \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N-k} q^{m+k} \\ &= q^k \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N-k} q^m \\ &= q^k \sum_{m=0}^{\infty} q^m \\ &= \frac{q^k}{1-q}.\end{aligned}$$

b) Notemos que tal serie se puede escribir como una suma de series geométricas de la siguiente manera[1]:

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q} &= q^1 + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots \\ &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots \\ &+ q^2 + q^3 + q^3 + \cdots \\ &+ q^3 + q^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} q^m \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n \\ &= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{q}{(1-q)^2}.\end{aligned}$$

□

[1]Este procedimiento es posible gracias a la convergencia absoluta. No se pide argumentar esto, pues será tratado debidamente después como se indicó en el taller.

3. Se tiene que la ecuación del elipsoide es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

a) Determine la ecuación de la elipse que se forma al intersectar un plano ortogonal al eje z con el elipsoide.

b) Determine el volumen del elipsoide.

c) Obtenga el volumen de la esfera como un caso particular de lo anterior.

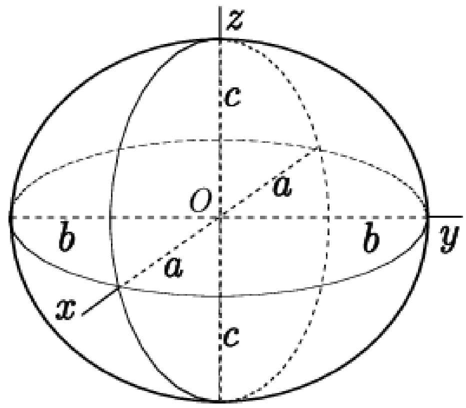

Figura 1: Elipsoide.

Demostración. *a*) De la ecuación (1) se obtiene, usando como parámetro a z la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1. \tag{2}$$

b) Sea $A_e(z)$ es área de la elipse en (2). Se tiene que el volumen V del elipsoide es:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-c}^{c} A_e(z)dz \\
&= \int_{-c}^{c} \left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} \right) \left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} \right) \pi dz \\
&= ab\pi \int_{-c}^{c} \left(1-\frac{z^2}{c^2} \right) dz \\
&= ab\pi \left(z-\frac{z^3}{3c^2} \right) \Big|_{-c}^{c} \\
&= 2ab\pi \left(c-\frac{c}{3} \right) \\
&= \frac{4abc}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

c) Como caso particular se tiene la esfera, es decir, $a = b = c = r > 0$, y luego el volumen de la V_E esfera es:

$$V_E = \frac{4r^3}{3}\pi.$$

□