Control 3 - Pauta

CÁLCULO II
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudantes: José Aburto - Madelaine Ramirez
24 de Noviembre, 2016

1. Calcule

   a) La siguiente derivada:

$$\frac{d}{dx}\int_1^{-\int_{e^x}^0 dx} s+\log(s)ds$$

.

   b) La integral indefinida:

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$$

Solución:

   a) Utilizaremos la regla de la cadena como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo. Notemos que:

$$\begin{aligned} -\int_{e^x}^0 dx &= \int_0^{e^x} dx \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_1^{-\int_{e^x}^0 dx} s+\log(s)ds &= \frac{d}{dx}\int_1^{e^x} s+\log(s)ds \\ &= (e^x+\log(e^x))\cdot\frac{d}{dx}e^x-(1+\log(1))\cdot\frac{d}{dx}1 \\ &= (e^x+x)\,e^x. \end{aligned}$$

Pues, la derivada de una constante es cero, y el logaritmo natural es la inversa de la exponencial.

   b) Usaremos el cambio de variable $u=e^x$, luego $du=e^xdx$. Entonces:

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx = \int \frac{u+1}{(u-1)u}du. \tag{1}$$

Descompondremos en fracciones parciales. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}\frac{u+1}{(u-1)u} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}\\ &= \frac{Au - A + Bu}{(u-1)u}.\end{aligned}$$

Y se tiene:

$$\begin{aligned}A + B &= 1\\ -A &= 1,\end{aligned}$$

y obtenemos que $A = -1$, $B = 2$. Usando la descomposición en (1), se obtiene que:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx &= \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{2}{u-1}\right) du\\ &= -\int \frac{du}{u} + 2\int \frac{du}{u-1}\\ &= -\log|u| + 2\log|u-1| + c\\ &= -\log(e^x) + 2\log(e^x-1) + c\\ &= -x + \log((e^x-1)^2) + c, \quad \text{c constante.}\end{aligned}$$

2. Determine el área de la región que encierran las curvas en el plano definidas por $y = \frac{1}{2}x^2$ con $y = -x^2 + 3x$ como se indica en la figura.

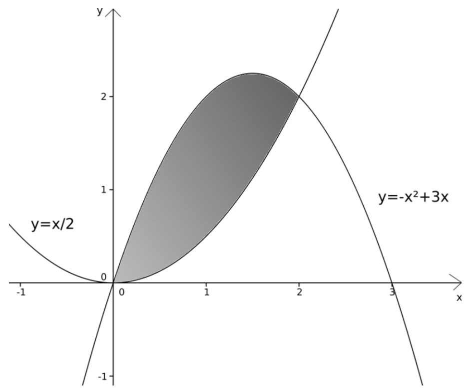

Figura 1: Figura: Región del problema 2.

Solución:
Debemos integrar entre 0 y x_0 la diferencia de los valores de las funciones $-x^2 + 3x$ y $\frac{1}{2}x^2$. Determinaremos x_0, en efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_0^2 &= -x_0^2 + 3x_0,\\ x_0^2 - 2x_0 &= 0,\end{aligned}$$

y de esta manera obtenemos que x_0 es igual a 0 ó a 2. La solución a la ecuación anterior corresponderá a $x_0 = 2$ pues el otro resultado posible es precisamente el otro valor de x donde se intersectan las curvas en el origen, que no corresponde. Luego, tenemos que el área A a determinar es:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 -x^2 + 3x - \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{8}{6} \\ &= 6 - \frac{24}{6} \\ &= 2. \end{aligned}$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable.

   a) Si f es una función par[1]. Entonces, para todo $a > 0$ se tiene que:

   $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

   .

   b) Si f es una función impar[2]. Entonces, para todo $a > 0$ se satisface:

   $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

   .

   c) Calcule

   $$\int_{-e^\pi}^{e^\pi} \left(\sin^3(x) + 1\right) dx$$

Solución:

a) Se tiene:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

Consideremos el cambio de variable $x = -t$, y luego $dx = -dt$. Por lo tanto, cuando $x = -a$ se tiene que $t = a$ y cuando $x = 0$ se tiene que $t = 0$. Realizando el cambio de variable se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)dx &= -\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx, \\ &= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx. \end{aligned}$$

[1]Que f sea una función par, significa que $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio.
[2]Que f sea una función impar, significa que $f(-x) = -f(x)$ para todo x en su dominio.

Esto último paso es debido a que la función es impar. Digamos ahora que $x = t$ por lo que $dx = dt$ y los límites de integración se conservan. Finalmente:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx, \\ &= \int_{a}^{a} f(x)dx, \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Similarmente tenemos que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

onsideremos el cambio de variable $x = -t$, y luego $dx = -dt$.. Por lo tanto, cuando $x = -a$ se tiene que $t = a$ y cuando $x = 0$ se tiene que $t = 0$. Realizando el cambio de variable se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx, \\ &= -\int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx, \\ &= \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx.\end{aligned}$$

Finalmente, digamos que $x = t$ con $dx = dt$, por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx, \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)dx.\end{aligned}$$

c) Notemos que $\operatorname{sen}(-x)^3 = -\operatorname{sen}(x)^3$ ya que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}(x)^3$ es una función impar. Por otro lado, la función $f(x) = x$ satisface la igualdad $f(x) = f(-x)$, por lo que es una función par. Finalmente, se concluye que la integral:

$$\begin{aligned}\int_{-e^{\pi}}^{e^{\pi}} \left(\sin^3(x) + 1\right) dx = \int_{-e^{\pi}}^{e^{\pi}} \sin^3(x) + \int_{-e^{\pi}}^{e^{\pi}} dx \\ = 0 + 2\int_{0}^{e^{\pi}} dx \\ = 2e^{\pi}.\end{aligned}$$