Pauta Control N° 1 - Cálculo 1-Exactos
II Semestre 2016
Tiempo: 60 minutos

7 de octubre de 2016

A continuación se presentan unas posibles soluciones a los ejercicios.

1. Demuestre que si a, b, c y d son números reales, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces
$$a(b+d) = b(a+c) \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1}.$$

   Demostración: Notamos que,

$$\begin{aligned}
ad &= 0 + ad, \ \textit{neutro aditivo} \\
&= [-(ab) + ab] + ad, \ \textit{inverso aditivo} \\
&= -(ab) + (ab + ad), \ \textit{asociatividad} \\
&= -(ab) + a(b+d), \ \textit{distributividad} \\
&= -(ab) + b(a+c), \ \textit{hipótesis} \\
&= -(ab) + (ba + bc), \ \textit{distributividad} \\
&= [-(ab) + ba] + bc, \ \textit{asociatividad} \\
&= [-(ab) + ab] + bc, \ \textit{conmutatividad} \\
&= 0 + bc \qquad\qquad ,\textit{inverso aditivo} \\
&= bc \qquad\qquad\quad ,\textit{neutro aditivo}
\end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado como $b \neq 0$ y $d \neq 0$, existen b^{-1}, d^{-1} en $\mathbb{R}$, consideremos

$$\begin{aligned}
ab^{-1} &= b^{-1}a && , \textit{conmutatividad} \\
&= (b^{-1}a) \cdot 1 && , \textit{neutro multiplicativo} \\
&= (b^{-1}a)(dd^{-1}) && , \textit{inverso multiplicativo} \\
&= [(b^{-1}a)d]d^{-1} && , \textit{asociatividad} \\
&= [b^{-1}(ad)]d^{-1} && , \textit{asociatividad} \\
&= [b^{-1}(bc)]d^{-1} && , \textit{por (1)} \\
&= [(b^{-1}b)c]d^{-1} && , \textit{asociatividad} \\
&= (1 \cdot c)d^{-1} && , \textit{inverso multiplicativo} \\
&= cd^{-1} && , \textit{neutro multiplicativo} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Donde (2) completa la demostración.

2. Demuestre que, si $(0 < a < b)$ y $(0 < c < d)$, entonces $ac < bd$.

Demostración: Tenemos que si,

$$0 < a < b \Leftrightarrow \{(b-a) \in \mathbb{R}^+ \wedge a, b \in \mathbb{R}^+\} \tag{3}$$

por la misma razón,

$$0 < c < d \Leftrightarrow \{(c-d) \in \mathbb{R}^+ \wedge c, d \in \mathbb{R}^+\} \tag{4}$$

luego de (3) y (4) se obtiene $(b-a)c \in \mathbb{R}^+ \wedge (d-c)b \in \mathbb{R}^+$ por tanto

$$[(b-a)c + (d-c)b] \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

pero

$$\begin{aligned}
[(b-a)c + (d-c)b] &= [bc - ac + db - bc] \\
&= db - ac \qquad (6)
\end{aligned}$$

de (5) y (6) tenemos que $(db - ac) \in \mathbb{R}^+$ y esto pasa si y solamente si $ac < bd$.

3. Encuentre el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{4}{x} + \frac{x-1}{5} < \frac{3}{x} + 1. \tag{7}$$

Solución: Tenemos que si,

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{x}+\frac{x-1}{5} &< \frac{3}{x}+1\\
\Rightarrow \frac{4}{x}+\frac{x-1}{5}-\frac{3}{x}-1 &< 0\\
\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{x-6}{5} &< 0\\
\Rightarrow \frac{x^2-6x+5}{5x} &< 0\\
\Rightarrow \frac{(x-5)(x-1)}{5x} &< 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

luego de (8) generamos la siguiente tabla con los ceros de la función,

		0		1		5	
x	-	0	+		+		+
x-1	-		-	0	+		+
x-5	-		-		-	0	+
	$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$

Cuadro 1: Identificando los signos con los ceros de la función.

de la tabla (1) encontramos que el conjunto solución está dado por $]-\infty,0[\cup]1,5[$.