Control N° 3 - Cálculo 1
II Semestre 2016
Tiempo: 70 minutos

18 de noviembre de 2016

1. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{2n}}$ y luego demostrar el resultado.

   Solución: Notamos que como $n \in \mathbb{N} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt{2n}} &= \frac{7}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{n}} \qquad (1) \end{aligned}$$

   además sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y considerando la ecuación (1), tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{2n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot 0 \\ &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

   Por tanto, debemos demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left|\frac{7}{\sqrt{2n}} - 0\right| < \varepsilon,\ \forall n > n_0 \qquad (3)$$

Primero realizaremos un borrador

Borrador: Como $\frac{7}{\sqrt{2n}} > 0$, ya que $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} |\frac{7}{\sqrt{2n}} - 0| &= |\frac{7}{\sqrt{2n}}| \\ &= \frac{7}{\sqrt{2n}} < \varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

despejando n de (4) hacia el lado derecho de la desigualdad obtenemos

$$\frac{49}{2\varepsilon^2} < n \tag{5}$$

donde (5) es una verdad justificable por propiedad arquimediana, estamos listos para comenzar la demostración.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$ y $\frac{49}{2\varepsilon^2} \in \mathbb{R}$, por propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\begin{aligned} \frac{49}{2\varepsilon^2} &< n_0 < n,\ n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \frac{49}{2\varepsilon^2} &< n \qquad , \forall n > n_0 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{2n}} &< \varepsilon \qquad , \forall n > n_0 \\ \Leftrightarrow |\frac{7}{\sqrt{2n}}| &< \varepsilon \qquad , \forall n > n_0 \\ \Leftrightarrow |\frac{7}{\sqrt{2n}} - 0| &< \varepsilon \qquad , \forall n > n_0 \end{aligned} \tag{6}$$

donde (6) concluye la demostración.

2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, pruebe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{8|L|}{7}$, para todo $n > n_0$.

   Demostración: Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon,\ \forall n > n_0$$

luego por propiedad del valor absoluto, tenemos que

$$\begin{aligned} |a_n| - |L| &< |a_n - L| < \varepsilon, \ \forall n > n_0 \\ |a_n| - |L| &< \varepsilon \qquad\qquad , \ \forall n > n_0 \\ |a_n| &< \varepsilon + |L| \qquad , \ \forall n > n_0 \end{aligned} \tag{7}$$

como deseamos que $|a_n| < \frac{8|L|}{7}$, hacemos que $\varepsilon + |L| = \frac{8|L|}{7}$, luego despejando ε, nos damos cuenta que basta tomar

$$\varepsilon = \frac{|L|}{7} > 0 \tag{8}$$

reemplazando (8), en (7) nos queda,

$$\begin{aligned} |a_n| &< \frac{|L|}{7} + |L|, \ \forall n > n_0 \\ &= \frac{8|L|}{7} \qquad , \ \forall n > n_0 \end{aligned} \tag{9}$$

donde (9) es lo que queríamos demostrar.

3. Considere la sucesión cuyos términos son $x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(n!+2016)}{n+7}$

   a) ¿Es acotada? ¿Monótona?, Justifique.

      Solución: Teniendo en cuenta las variadas maneras de mostrar que la sucesión x_n es acotada, aquí sólo se muestran dos formas de verificar esto:

      - **Forma 1:** Sabemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &\leq n \qquad , \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \sqrt{n} + 7 &\leq n + 7 \quad , \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+7} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}+7}, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{n+7} &\leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+7}, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &< \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \qquad , \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &= 1 \qquad , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{10}$$

multiplicando (10) por -1, obtenemos

$$-1 < -\frac{\sqrt{n}}{n+7} \qquad , \forall n \in \mathbb{N} \tag{11}$$

como $-1 \leq \sin(n! + 2016) \leq 1$, la sucesión x_n nos queda,

$$-\frac{\sqrt{n}}{n+7} \leq \frac{\sqrt{n}\sin(n!+2016)}{n+7} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+7} \tag{12}$$

de (10), (11) y (12) tenemos que la sucesión x_n está acotado por,

$$-1 \leq \frac{\sqrt{n}\sin(n!+2016)}{n+7} \leq 1$$

- **Forma 2:** Como el límite existe demostrado en b), por teorema visto en clases entonces la sucesión x_n es acotada.

La sucesión x_n, no es monótona, ya que si consideramos la sucesión $y_n = \sin(n! + 2016)$, es periódica y toma valores positivos y negativos en cada período, por lo que no cumple que $y_n \leq y_{n+1}$ (o $y_{n+1} \leq y_n$), para todo $n \in \mathbb{N}$, luego como $z_n = \frac{\sqrt{n}}{n+7} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, al considerar que $x_n = z_n \cdot y_n$, tampoco sería monótona ya que la sucesión x_n también irá cambiando de signo en cada período de y_n.

b) ¿Existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$? Si posee límite calcularlo, si no probar que no existe.

Solución: El límite de x_n existe, ya que es una sucesión acotada y lo calcularemos por el Teorema del Sandwich, en efecto de (12) y por propiedad del valor absoluto,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sqrt{n}\sin(n!+2016)}{n+7}\right| &\leq \frac{\sqrt{n}}{n+7} \\ &< \frac{\sqrt{n}}{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n}} \end{aligned} \tag{13}$$

donde (13) es cierto si y solamente si,

$$-\sqrt{\frac{1}{n}} < \frac{\sqrt{n}\sin(n!+2016)}{n+7}| < \sqrt{\frac{1}{n}} \tag{14}$$

y como el $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0 = \lim_{n\to\infty} -\sqrt{\frac{1}{n}}$, entonces por Teorema del Sandwich $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.