

Conceptos básicos 1

Ayudantía 1

Rubén Meza

3 de octubre de 2016

1. $\mathbb{R}$ es un cuerpo

En $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones, llamadas *adición*(+) y *multiplicación*($\cdot$), las cuales cumplen las siguientes condiciones.

La adición considera dos elementos $a, b \in \mathbb{R}$, en un único elemento su *suma* $a + b \in \mathbb{R}$, en cambio la multiplicación asocia éstos a un único elemento su *producto* $a \cdot b \in \mathbb{R}$

1.1. Axiomas de la adición

Asociatividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Conmutatividad: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $a + b = b + a$.

Elemento Neutro: $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Inverso: Todo $a \in \mathbb{R}$ posee un *inverso aditivo* $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.

1.2. Axiomas de la multiplicación

Asociatividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Conmutatividad: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $a \cdot b = b \cdot a$.

Elemento Neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Inverso: Todo $a \in \mathbb{R}$ posee un *inverso multiplicativo* $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$ con $a \neq 0$.

1.3. Axioma de la Distribución

Distributividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

1.4. Notación

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, a \neq 0$$

2. $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado

Quiere decir que existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, el conjunto de los *números reales positivos*, los cuales cumplen que:

2.1. Propiedad 1

El producto y la suma en $\mathbb{R}^+$ son positivos. Es decir, sean $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a + b \in \mathbb{R}^+ \wedge a \cdot b \in \mathbb{R}^+)$

2.2. Propiedad 2

Dado $a \in \mathbb{R}$, se verifica una, y sólo una, de las siguientes alternativas: ó $a \in \mathbb{R}^+$, ó $-a \in \mathbb{R}^+$, ó $a = 0$.

2.3. Definiciones

1. $\mathbb{R}^-$ es llamado el conjunto de *números reales negativos*, es decir $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}: -x \in \mathbb{R}^+\} = \{-x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}^+\}$
2. Se dice que a es *menor* que b (o que b es *mayor* que a) cuando $b - a \in \mathbb{R}^+$ y se escribe $a < b$, es decir $b = a + c$ donde $c \in \mathbb{R}^+$. Notamos que $x > 0 \iff x \in \mathbb{R}^+$.