Estabilidad de Órbitas Troyanas

(Problema Restringido de Tres Cuerpos)

Recordemos la forma de nuestro "potencial efectivo"

$$\boxed{\Psi(\vec{u}) = -\frac{1}{2}\omega^2 \vec{u}^2 - \frac{GM_A}{|\vec{u}-\vec{R}_A^\circ|} - \frac{GM_B}{|\vec{u}-\vec{R}_B^\circ|}} \qquad (1)_a$$

$$\boxed{\vec{u}-\vec{R}_A^\circ = [u_x + R_A, u_y] \equiv \vec{u}_A} \;\text{b)} \qquad (1)_{b,c}$$

$$\boxed{\vec{u}-\vec{R}_B^\circ = [u_x - R_B, u_y] \equiv \vec{u}_B} \;\text{c)}$$

$$\boxed{R_A = R\,P_B, \quad R_B = R\,P_A} \;\text{d)}, \qquad \boxed{P_{A,B} = \frac{M_{A,B}}{M}} \;\text{e)}$$

$$\boxed{\omega^2 R^3 = GM} \;\text{f)} \qquad \boxed{M = M_A + M_B} \;\text{g)} \qquad (1)_{d-g}$$

Normalicemos $\Psi(\vec{u})$ dividiéndolo por

$\omega^2 R^2 = GM/R$; redefinimos $\qquad (2)_{a,b}$

$$\boxed{\vec{u} \to \vec{u}/R, \quad t \to t\omega, \quad M_A \to P_A, \quad M_B \to P_B} \;\text{a)}$$

y $$\boxed{\Psi(\vec{u}) \to \frac{1}{\omega^2 R^2}\Psi(\vec{u}) = \frac{R}{GM}\Psi(\vec{u}) \equiv \Psi(\vec{u})} \;\text{b)}$$

(la última igualdad vale en unidades $(2)_a$)

$$\boxed{\Psi(\vec{u}) = -\frac{1}{2}\vec{u}^2 - \frac{P_A}{u_A} - \frac{P_B}{u_B}} \qquad (3)_a$$

Ahora
$$\boxed{\vec{U}_A = [U_x + P_B\,,\, U_y]} \quad b)$$
$$\boxed{\vec{U}_B = [U_x - P_A\,,\, U_y]} \quad c) \qquad (3)_{b,c}$$

Tenemos las derivadas

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial U_x} = -U_x + \frac{P_A U_{AX}}{|U_A|^3} + \frac{P_B U_{BX}}{|U_B|^3}} \quad a)$$
$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial U_y} = -U_y + \frac{P_A U_y}{|U_A|^3} + P_B \frac{U_y}{|U_B|^3}} \quad b) \qquad (4)$$

Sabemos que $\boxed{\dfrac{\partial \Psi}{\partial U_x} = 0 = \dfrac{\partial \Psi}{\partial U_y}}$ si $\boxed{\vec{u} = \{\vec{L}_4, \vec{L}_5\}}$ $(5)_a$

con $\vec{L}_{4,5} = \left[\frac{1}{2}(R_B - R_A)\,,\, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} R\right]$, y en unidades de $(2)_{a,b}$ $\boxed{\vec{L}_{4,5} = \frac{1}{2}\left[P_A - P_B\,,\, \pm\sqrt{3}\right]}$ $(5)_b$

Queremos tratar la dinámica en torno a puntos $\vec{L}_4, \vec{L}_5$ en la Aproximación Armónica; ello involucra expandir $\Psi(\vec{u})$ en torno a estos puntos hasta segundo orden. Por fijar ideas, tomemos el punto $\vec{L}_4$

$$\boxed{\vec{u} = \vec{L}_4 + \vec{\Delta}\,,\ |\vec{\Delta}| \ll 1} \qquad (6)_a$$

Ahora

$$\boxed{\Psi(\vec{L}_4+\Delta) = \Psi(\vec{L}_4) + \Psi_{xx}\frac{(\Delta_x)^2}{2} + \Psi_{yy}\frac{(\Delta_y)^2}{2} + \Psi_{xy}\,\Delta_x\,\Delta_y} \qquad (6)_b$$

con

$$\boxed{\Psi_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}\right)_{\vec{u}=\vec{L}_4}} \qquad (6)_c$$

Derivemos nuevamente $(4)_{a,b}$, evaluando luego en $\vec{L}_4$:

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_x\,\partial u_y} = -3\,u_y\left[P_A\frac{u_{Ax}}{|u_A|^5} + P_B\frac{u_{Bx}}{|u_B|^5}\right]} \qquad (7)_a$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_x^2} = -1 + \frac{P_A}{|u_A|^3} + \frac{P_B}{|u_B|^3} - 3\left[\frac{P_A(u_{Ax})^2}{|u_A|^5} + \frac{P_B(u_{Bx})^2}{|u_B|^3}\right]} \qquad (7)_b$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_y^2} = -1 + \frac{P_A}{|u_A|^3} + \frac{P_B}{|u_B|^3} - 3(u_y)^2\left[\frac{P_A}{|u_A|^5} + \frac{P_B}{|u_B|^5}\right]} \qquad (7)_c$$

Evaluamos $(7)_{a-c}$ en $\vec{u} = \vec{L}_4$. De $(5)_b$ y $(3)_{b,c}$

$$\boxed{\vec{u}_A = \tfrac{1}{2}\left[1,\sqrt{3}\right]}_{a)} \quad \boxed{\vec{u}_B = \tfrac{1}{2}\left[-1,\sqrt{3}\right]}_{b)} \qquad (8)$$

$$\boxed{|\vec{u}_A| = 1 = |\vec{u}_B|}_{c)} \quad \boxed{u_{Ax} = \tfrac{1}{2}}_{d)} \quad \boxed{u_{Bx} = -\tfrac{1}{2}}_{e)} \quad \boxed{u_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{f)}$$

Reemplazando, queda (uso $P_A + P_B = 1$):

$$\boxed{\Psi_{xx} = -1 + P_A + P_B - \frac{3}{4}\left[P_A + P_B\right] = -\frac{3}{4}} \quad a)$$

$$\boxed{\Psi_{yy} = -1 + P_A + P_B - \frac{9}{4}\left[P_A + P_B\right] = -\frac{9}{4}} \quad b) \qquad (8)$$

$$\boxed{\Psi_{xy} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{P_A - P_B}{2}\right) = -\frac{\sqrt{27}}{4}\left(P_A - P_B\right)} \quad c)$$

La aceleración es

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{\Delta}}{\partial \tau^2} = 2\left(\frac{\partial \vec{\Delta}}{\partial t}\right) \times \frac{\hat{z}\,\omega}{\omega^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{\Delta}}} \qquad (9)_a$$

Acá $\boxed{\tau = t\,\omega}$, y el divisor $\frac{1}{\omega^2}$ viene de $(2)_b$

[En otras palabras, usamos unidades $R = M = \omega = 1$]

$$\left(\frac{\partial \vec{\Delta}}{\partial \tau}\right) \times \hat{z} = \left[\hat{x}\,\frac{\partial \Delta_x}{\partial \tau} + \hat{y}\,\frac{\partial \Delta_y}{\partial \tau}\right] \times \hat{z} =$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial \vec{\Delta}}{\partial \tau}\right) \times \hat{z} = \hat{x}\,\frac{\partial \Delta_y}{\partial \tau} - \hat{y}\,\frac{\partial \Delta_x}{\partial \tau}} \qquad (9)_b$$

Por último, usamos $(6)_b$ para evaluar $\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{\Delta}}$:

$$\boxed{\frac{d^2 \Delta_x}{d \tau^2} = 2\,\frac{\partial \Delta_y}{\partial \tau} - \Delta_x \Psi_{xx} - \Delta_y \Psi_{xy}} \qquad (10)_a$$

$$\boxed{\frac{d^2 \Delta_y}{d \tau^2} = -2\,\frac{\partial \Delta_x}{\partial \tau} - \Delta_y \Psi_{yy} - \Delta_x \Psi_{xy}} \qquad (10)_b$$

Acá tenemos un sistema de Ecuaciones Diferenciales lineales a coeficientes constantes para $[\Delta_x(z), \Delta_y(z)]$. Sabemos que las soluciones en tal caso son de tipo exponencial:

$$\boxed{\begin{bmatrix}\Delta_x(z)\\ \Delta_y(z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta^\circ_x\\ \Delta^\circ_y\end{bmatrix} e^{i\lambda z}} \qquad (11)_a$$

Al reemplazar en $(10)_{a,b}$ tenemos

$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} = i\lambda}$ $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\lambda^2}$ Moviendo $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ a la derecha queda

$$\boxed{0 = (\lambda^2 - \Psi_{xx})\Delta^\circ_x + (2i\lambda - \Psi_{xy})\Delta^\circ_y} \qquad (11)_b$$

$$\boxed{0 = (\lambda^2 - \Psi_{yy})\Delta^\circ_y - (2i\lambda + \Psi_{xy})\Delta^\circ_x} \qquad c)$$

Matricialmente, $(11)_{b,c}$ toma la forma

$$\boxed{\left[\begin{array}{c:c}\lambda^2 - \Psi_{xx} & 2i\lambda - \Psi_{xy}\\ \hdashline -2i\lambda - \Psi_{xy} & \lambda^2 - \Psi_{yy}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Delta^\circ_x\\ \Delta^\circ_y\end{bmatrix} = 0} \qquad (12)_a$$

o $$\boxed{M\begin{bmatrix}\Delta^\circ_x\\ \Delta^\circ_y\end{bmatrix} = 0} \qquad (12)_b$$

La condición para tener soluciones NO TRIVIALES (Δ°_x, Δ°_y no ambos nulos) es $\boxed{\mathrm{Det}[M] = 0}$ $(13)_a$

Esto constituye la Ecuación Secular

De $(12)_a$

$$\boxed{\mathrm{Det}[M] = (\lambda^2 - \Psi_{xx})(\lambda^2 - \Psi_{yy}) - \Psi_{xy}^2 - 4\lambda^2 = 0}_{b)}$$

$$\boxed{\lambda^4 - \lambda^2(4 + \Psi_{xx} + \Psi_{yy}) + \Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2 = 0}_{c)}$$

De $(8)_{a-c}$: $\boxed{\Psi_{xx} = -\frac{3}{4}}$ $\boxed{\Psi_{yy} = -\frac{9}{4}}_{d)}$ (13)

$$\boxed{\Psi_{xy} = -\frac{\sqrt{27}}{4}(P_A - P_B)}_{e)}$$

Rel. $(13)_c$ queda como

$$\boxed{\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27}{16}\left[1 - (P_A - P_B)^2\right] = 0}_{a)} \qquad (14)$$

$$\boxed{1 - (P_A - P_B)^2 = [1 - (P_A - P_B)][1 + P_A - P_B] = 4P_AP_B}_{b)}$$

pues $\boxed{1 - P_A = P_B}$, $1 - P_B = P_A$. Así

$$\boxed{\lambda^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27P_AP_B}} \qquad (15)$$

La condición de estabilidad para solución $(11)_a$ [conducto oscilante, en vez de alejamiento exponencial] es $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$ $(16)_a$

Luego

$$1 > 27P_AP_B, \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{1}{27} - P_A + P_A^2 > 0} \qquad (16)_b$$

Al elegir $P_A < \frac{1}{2} < P_B$: $\boxed{P_A < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{27}} = 0.0385208965}$

O sea $$\boxed{\frac{M_A}{M_A+M_B} < 0.0385208965} \qquad (17)_a$$

Tomando el inverso de esta relación sigue $$\boxed{\frac{M_B}{M_A} > 24.96} \qquad (17)_b$$

Es decir, las órbitas Troyanas son estables sólo si uno de los dos Astros Masivos es considerablemente mayor (en masa) que el segundo. Cuando las masas M_A, M_B no son demasiado diferentes, el "Asteroide Troyano" se aleja exponencialmente del punto Lagrangeano L_4 o L_5.

Así, el par Plutón-Charon <u>NO</u> puede tener Troyanos.

Para el caso de más de 3 cuerpos, puede ser que, aun cumpliéndose $(17)_{a,b}$, la perturbación de un cuarto cuerpo elimine la estabilidad Troyana. También la excentricidad de la órbita A-B podría destruir estabilidad de Troyano.