

GUIA 3. VARIABLE COMPLEJA

1

Describe todos los números complejos z que cumplen $e^z = 1$.

2

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) := |z|^2$.

- f es holomorfa en 0 .
- f no es holomorfa en $z \neq 0$.
- La función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) := x^2 + y^2$ es indefinidamente derivable.

3

Una función holomorfa es continua.

4

El conjunto de pares (u, v) de funciones armónicamente conjugadas forman un subespacio vectorial de $C^2(\Omega) \times C^2(\Omega)$.

5

Si (u, v) son armónicamente conjugadas, entonces $(v, -u)$ son armónicamente conjugadas.

6

- Generalize el laplaciano, la ecuación de Laplace y el concepto de función armónica en n variables.
- Ejemplos de funciones armónicas en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^3$.

7

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $R > 0$.

Pruebe que cada función armónica en el disco $D((x_0, y_0), R)$ tiene una conjugada armónica.

8

La función $f(x + iy) := 2x^2 - 3xy + y^2 - y + iv(x, y)$ es entera y cumple $f(0) = 0$. Calcule v .

9

- La función

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) := \exp(x^2 - y^2) \cos(2xy)$$

es armónica.

- Calcule su conjugada armónica y la función holomorfa correspondiente.

10

- La función

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$$

es armónica.

- Calcule su conjugada armónica en $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ y la función holomorfa correspondiente.

11

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio abierto y conexo. Ocupando las ecuaciones de Cauchy Riemann, muestre (de nuevo) que una función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es holomorfa si y solo si es constante.

12

Determine el mas general polinomio armónico de la forma $p(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$.

La función $f = p + iv$ es entera. Qué forma tiene v ?

13

La función holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tiene la propiedad $|f(z)| = 9$ para cada $z \in \Omega$. Qué se puede decir de f ?

14

Sea Ω un disco finito o infinito en el plano complejo. Sea $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica.

Existe una función armónica $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\text{Im}(g) = v$.

15

Muestre la regla de Leibnitz ocupando las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

16

Sea la función

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) := 2x^2 - 2y^2 + 3x - 1.$$

Muestre que existe una función entera f con $\text{Re}(f) = u$ y $f(0) = -1 + 3i$. Calcule esta función.

17

Supongamos que f es una función holomorfa en el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Ocupando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, muestre que la función $g(z) := 1/f(z)$ es holomorfa en el conjunto abierto $\tilde{\Omega} := \{z \in \Omega \mid f(z) \neq 0\}$.