AYUDANTÍAS

GRUPOS Y ANILLOS (OTOÑO 2016)

Ayudantía 1: En esta sección trabajaremos con un concepto de vital importancia en la teoría de grupos y en la matemática en general, estas son las acciones de grupos.

1.- **Problema 1:**
Sea $G \cong C_n$ grupo cíclico de orden $n \in \mathbb{N}$ y sea $Aut(G)$ su grupo de automorfismos.

i.- Determine $|Aut(G)|$.

ii.- Demuestre que $Aut(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Desarrollo:

i.- Recordemos que $Aut(G)$ actúa en G vía $\varphi.g := \varphi(g)$, para cualquiera $\varphi \in Aut(G)$, $g \in G$. Además todo homomorfismo φ de G está completamente determinado por su valor en σ, para $G = \langle\sigma\rangle$, ya que $\varphi(\sigma^i) = \varphi(\sigma)^i$. Además si $\varphi : G \longrightarrow G$, entonces $\varphi(\sigma) = \sigma^j$, para cierto $j \in \{1, \cdots, n\}$. Por otro lado si φ es ismomorfismo entonces $|\sigma| = |\varphi(\sigma)|$, reemplazando los valores respectivo obtenemos que $n = \frac{n}{(n,j)}$. Así $(n, j) = 1$, es decir ny j son relativamente primos, lo que equivale a que $j \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Reciprocamente para cualquiera $\varphi : G \to G$ tal que $\varphi(\sigma) = \sigma^j$, para $(j, n) = 1$ tenemos que φ es un automorfismo de G pues lleva el generador σ de G en otro generador del mismo grupo.

Luego $|Orb_{Aut(G)}(\sigma)| = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \phi(n)$, donde ϕ es la función de Euler.

Por último $Stab_{Aut(G)}(\sigma) = \{\varphi \in Aut(G) : \varphi(\sigma) = \sigma\} = id$. Por lo tanto $|Stab_{Aut(G)}(\sigma)| = 1$. Luego por la identidad

$$|Aut(G)| = |Orb_{Aut(G)}(\sigma)||Stab_{Aut(G)}(\sigma)|$$

tenemos que $|Aut(G)| = \phi(n)$, donde ϕ es la función de Euler.

ii.- Designemos por φ_j al automorfismo de G tal que $\varphi(\sigma) = \sigma^j$. Observe que la función:

$$\tau : Aut(G) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* : \varphi_j \mapsto j,$$

es una función sobreyectiva, por lo visto en el ejercicio anterior. Como los conjuntos en cuestión son finitos y de igual cardinal, τ es una biyección. Además $\varphi_i(\varphi_j(\sigma)) = \sigma^{ij}$. Luego τ es homomorfismo, por ende isomorfismo.

2.- **Problema 2:**
Sea $G \cong C_p \times C_p$, donde C_p es un grupo cíclico de p elementos, para p primo. Determine $|Aut(G)|$.

Desarrollo: Observe que $G \cong V$, donde $V = (\mathbb{F}_p)^2$ visto como $\mathbb{F}_p$ espacio vectorial. Luego por lo visto en clases, $Aut(G) \cong Gl_2(\mathbb{F}_p)$ y dicho grupo tiene $(p^2-1)p(p-1)$ elementos.

3.- **Problema 3:**
Sea G grupo simple y H subgrupo de G tal que $[G:H]=p$, para p primo. Demuestre que p es el primo más grande que divide a $|G|$ y que $p^i \nmid |G|$, $\forall i > 1$.

Demostración: Si $|G|=p$ el resultado se sigue facilmente. Si no es este el caso, considere la acción de G sobre el conjunto $X=\{gHg^{-1} : g \in G\}$ vía:

$$x.(gHg^{-1}) = (xg)H(xg)^{-1}.$$

Luego existe un homomorfismo $\varphi : G \to Biy(X)$ definido por $\varphi(g)=\sigma_g$, donde $\sigma_g(xHx^{-1}) = (gx)H(gx)^{-1}$. Observe que $\ker(\varphi) \triangleleft G$, luego $\ker(\varphi) = G$ o $\ker(\varphi)=\{0\}$.

Si $\ker(\varphi)=G$ entonces $\varphi=0$. Pero $\sigma_g(H)=gHg^{-1}$, luego si $\varphi=0$ entonces $\sigma_g(H)=H$. Por lo tanto $\forall g \in G$ tenemos que $gHg^{-1}=H$, es decir $H \triangleleft G$. Luego $H=G$, en cuyo caso $[G:H]=1$ o bien $H=\{0\}$, en cuyo caso $|G|=[G:H]=p$. Ambas alternativas llevan a contradicciones.

Por otro lado si $\ker(\varphi)=\{0\}$ entonces $G \hookrightarrow Biy(X)$. Observe que $gHg^{-1} = hHh^{-1}$ sí y solamente sí $gh^{-1} \in N_G(H)$, es decir $|X| = [G : N_G(H)] \leq [G:H]$, pues $N_G(H) \supseteq H$.

Luego $|G| | |Biy(X)| = r!$, donde $|X|=r \leq p$. Pero $p | |G| = |H|[G:H]$. Luego si $q > p$ y $q | |G|$ entonces $q | r!$ con $r \leq p$. Esto es contradictorio. Por otro lado si $p^i | |G|$, para $i > 1$ entonces $p^i | r!$ luego $r=p$ y en este caso $p^{i-1} | (p-1)!$. Esto es contradictorio.

4.- **Problema 4:**
Muestre que si un grupo G cumple con $|G|=n$ y p es el menor primo que divide a n.

i.- Demuestre que todo subgrupo de índice p es normal en G.
ii.- Concluya que si $H \leq G$ tal que $[G:H]=2$ entonces $H \triangleleft G$.
iii.- Pruebe que $A_3 = \{id, (123), (132)\}$ es un subgrupo normal de S_3.

Desarrollo:

i.- Sea $H \leq G$ con $[G:H]=p$ primo. Considere la acción de G sobre $X=G/H$ conjunto de cosetos de H, vía:

$$g.(aH) = (ga)H.$$

Esta acción induce un homomorfismo $\pi_H : G \to Biy(X)$, donde $\pi_H(g) = \sigma_g$, donde $\sigma_g(aH) = g.(aH) = (ga)H$. Observe que:

$$\ker(\pi_H) = \{g \in G : gaH = aH, \forall a \in G\}.$$

Es decir $g \in \ker(\pi_H)$ sí y solamente sí $(a^{-1}ga)H = H$ para cualquier $a \in G$, lo que equivale a que $(a^{-1}ga) \in H$, $\forall a \in G$. Así $K = \ker(\pi_H) = \cap_{a \in G} aHa^{-1}$.

Observe que $K \triangleleft G$ por ser núcleo de un homomorfismo. Además $K \subset H = eHe^{-1}$.

Sea $l=[H:K]$, así $[G:K]=[G:H][H:K]=pl$. Como X tiene p cosetos, tenemos que $G/K \hookrightarrow S_p$, donde S_p es el grupo de biyecciones de

p elementos. Luego $pl = [G : K]|p!$, por lo tanto $l|(p-1)!$. Por otro lado como p es el primo más pequeo que divide a $|G|$ tenemos que $l = 1$.

Finalmente $H = K \lhd G$.

ii.- Si $H \leq G$ tal que $[G : H] = 2$ como 2 es el primo más pequeo el resultado se sigue de la parte anterior.

iii.- Observe que $|A_3| = 3$ y $|S_3 = 6|$, luego $[S_3 : A_3] = 2$ y el resultado se sigue de lo expuesto en [ii].

5.- **Problema 5:**
Sea G un grupo de orden n y S_n es el grupo de biyecciones de n elementos. Demuestre que existe un homomorfismo inyectivo $\varphi : G \to S_n$.

Demostración: Considere la acción de G sobre G vía $g.h = gh$, $\forall g, h \in G$. Esta acción de grupo induce un homomorfismo $\rho : G \to Biy(G)$ donde $\rho(g) = \sigma_g$, para $\sigma_g(h) = g.h = gh$. Observe que como $|G| = n$ tenemos que $Biy(G) \cong S_n$. Además $\ker(\rho) = \{g \in G : gh = 1, \forall h \in G\}$ tomando $h = 1$ tenemos que $\ker(\rho) = \{1\}$. Por lo tanto $\rho : G \to S_n$ es un homomorfismo inyectivo.

Ayudantía 2: En esta ayudantía trabajaremos los conceptos órbitas y estabilizadores de acciones de grupos.

1.- **Problema 1:**
Considere la acción de $G = S_3$ sobre G por conjugación. Calcule el número de órbitas de dicha acción.

Desarrollo:
Partamos por considerar las órbitas más elementales. Observe que $\sigma(id)\sigma^{-1} = id$, $\forall \sigma \in G$. Luego $Orb_G(id) = \{id\}$.
Por otro lado el largo de cualquier permutación es la misma que la de su conjugado. Así $Orb_G((123)) \subseteq \{(123), (132)\}$. Pero $(12)(123)(12)^{-1} = (12)(123)(12) = (132)$. Luego $Orb_G((123)) = \{(123), (132)\}$.
Por último calculemos la órbita de la permutación (13). Recordemos que $(ab)^{-1} = (ab)$. Luego como $(12)(13)(12) = (23)$, $(12)(23)(12) = (13)$ y $(23)(13)(23) = (12)$ tenemos que $Orb_G((13)) = \{(12), (13), (23)\}$.
Finalmente concluimos que existen 3 clases de conjugación.

2.- **Problema 2:**
Sea G grupo y $x \in Z(G)$. Considere la acción de G sobre sí mismo vía conjugación.
i.- Demuestre que $Orb_G(x) = \{x\}$.
ii.- Deduzca que $Z(S_3) = \{id\}$.

Desarrollo:
i.- Sabemos que por definición de centro de un grupo $xg = gx$, para todo $g \in G$. Luego $x = gxg^{-1}$, para todo $g \in G$. Es decir $Orb_G(x) = \{x\}$.
Observe que el recíproco de este hecho también es cierto. En efecto si $Orb_G(x) = \{x\}$ entonces $x = gxg^{-1}$, $\forall g \in G$. Luego $gx = xg$, $\forall g \in G$. Equivalentemente1 $x \in Z(G)$.

ii.- Basta analizar los elementos de S_3 con el fin de encontrar los elementos que tienen órbita trivial. Así concluimos que $Z(S_3) = \{id\}$.

3.- **Problema 3:**
Sea $G = S_n$ grupo y considere el $\mathbb{F}_q$ espacio vectorial $V = \mathbb{F}_q^n$, donde $q = p^t$, para p primo. Definimos la acción de G sobre V de la manera siguiente. Sea $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ entonces:

$$\sigma.v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{\sigma(i)}.$$

Calcule el número de órbitas de dicha acción.

Desarrollo:
Utilizaremos la siguiente igualdad vista en clases. Sea c el número de órbitas de una acción y $Fix(g) = \{v \in V : g.v = v\}$, entonces:

$$c = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Fix(g).$$

Sea $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ entonces $\sigma.v = v$ sí y solamente sí:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{\sigma(i)}.$$

Luego si $\sigma = (a_1 \cdots a_t)$ entonces $\alpha_{a_1} = \alpha_{a_2} = \cdots = \alpha_{a_t}$. Por lo tanto tenemos q^{n-t+1} posibles vectores con dicha propiedad. Por otro lado sabemos que existen $\binom{n}{t}$ permutaciones de largo t, para $t > 1$. Observe que si $t = 1$ entonces $\sigma = id$ y en dicho caso existen q^n elementos estables por la acción de σ. Por lo tanto:

$$c = \frac{1}{n!}\left[\sum_{t=2}^{n} \binom{n}{t} q^{n-t+1} + q^n\right].$$

Luego:

$$c = \frac{1}{n!}\left[q(q+1)^n - q^{n+1} - (n-1)q^n\right].$$

4.- **Problema 4:**

Considere la acción de G sobre $Aut(G)$ vía:

$$(g.\varphi)(x) = \varphi(gxg^{-1}) = \varphi \circ \varphi_g(x),\ \forall g \in G\ \forall \varphi \in Aut(G),$$

donde $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ se denomina automorfismo interior.

i.- Calcule el número de órbitas de dicha acción. Concluya que $[G : Z(G)]||Aut(G)|$.

ii.- Calcule el número de órbitas para G grupo abeliano. Concluya que en este caso la acción es trivial.

iii.- Calcule el número de órbitas para $G = Q_8$

iv.- Demustre que $G/Z(G) \cong \{\varphi_g : \varphi_g\ aut.\ interior\}$. Concluya que $Z(G) \triangleleft G$ y deduzca nuevamente que $[G : Z(G)]||Aut(G)|$.

Desarrollo:

i.- Haremos uso de la identidad explicada en el problema anterior, que nos dice que el número de órbitas c de la acción es:

$$c = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} Fix(g).$$

En efecto sea $g \in G$. Nos preguntamos cuantos automorfismos φ cumplen con $\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(x), \forall x \in G$. Observe que como φ es inyectivo tenemos que $x = gxg^{-1}, \forall x \in G$. Luego $|Fix(g)| = |Aut(G)|$, si $g \in Z(G)$ o bien $|Fix(g)| = 0$, si $g \notin Z(G)$. De esto se sigue que:

$$c = \frac{|Z(G)||Aut(G)|}{|G|},$$

lo que es equivalente a:

$$c = \frac{|Aut(G)|}{[G : Z(G)]}.$$

Luego como $c \in \mathbb{N}$ concluimos que $[G : Z(G)]||Aut(G)|$.

ii.- Observe que si G es abeliano, entonces $[G : Z(G)] = 1$. Entonces $c = |Aut(G)|$. Luego existen tantas órbitas como elementos del conjunto sobre el que actúa G. Esto implica que $g.\varphi = \varphi$ para cualquier $g \in G$ y $\varphi \in Aut(G)$.

ii.- Sabemos que $Z(Q_8) = \{1, -1\}$. Por otro lado todo automorfismo φ de Q_8 en Q_8 cumple con $\varphi(1) = 1$, además como -1 es el único elemento de orden 2 tenemos que $\varphi(-1) = -1$. Por otro lado $\varphi(i) \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$ y $\varphi(j) \in \{\pm i, \pm j, \pm k\} - \{\varphi(i), \varphi(-i)\}$. Esto último pues una vez elegido el valor de $\varphi(i)$, el de $\varphi(-i) = -\varphi(i)$. Lo mismo para j y k. Además una vez obtenido el valor de i y j el de $k = ij$ está únicamente determinado. Así tenemos que $|Aut(Q_8)| = 24$. Finalmente obtenemos que $c = \frac{48}{8} = 6$.

iv.- Observe que $\{\varphi_g : \varphi_g \text{ } aut. \text{ } interior\}$ es un grupo con la composición de funciones. A dicho grupo le llamaremos *grupo de automorfismos interiores de* G y lo denotaremos por $Inn(G)$. Observe que el homomorfismo $\rho : G \to Inn(G)$ definido por $\rho(g)(x) = gxg^{-1}$ es un morfismo sobreyectivo. Ahora bien $\ker(\rho) = \{g \in G : gxg^{-1} = x, \forall x \in G\} = Z(G)$. Luego $G/Z(G) \cong Inn(G)$.

Concluimos que $Z(G) \triangleleft G$. Además como $Inn(G) \leq Aut(G)$ tenemos que $[G : Z(G)] = |Inn(G)|$ cumple con $[G : Z(G)] \, | \, |Aut(G)|$.

Ayudantía 3: En esta ayudantía trabajaremos los conceptos centro y centralizador en el grupo de biyecciones S_n.

1.- **Problema 1:**
Sea $\sigma \in S_n$ y $x = (a_1 \cdots a_t)$ un ciclo de largo t. Demustre que $\sigma x \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_t))$.

Demostración: Sea $i \in \{1, \cdots, n\}$. Si $i = \sigma(a_j)$, algún $j \in \{1, \cdots t\}$, entonces $\sigma x \sigma^{-1}(i) = \sigma x(a_j) = \sigma(a_{j+1}) = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_t))(i)$. Por otro lado si $i \neq \sigma(a_j)\ \forall j$, entonces $\sigma x \sigma^{-1}(i) = i = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_t))(i)$. Luego por igualdad de funciones tenemos que $\sigma x \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_t))$.

1.- **Ejercicio 1:** Sea $\sigma \in S_n$ y $x = (a_{11} \cdots a_{1t}) \cdots (a_{r1} \cdots a_{rs}) \in S_n$ elemento cualquiera en S_n escrito como producto de ciclos disjuntos. Demustre que $\sigma x \sigma^{-1} = (\sigma(a_{11}) \cdots \sigma(a_{1t})) \cdots (\sigma(a_{r1}) \cdots \sigma(a_{rs}))$.

2.- **Problema 2:**
Sea S_n grupo de biyecciones del conjunto de n elementos y considere la acción de S_n sobre sí mismo por conjugación.

i.- Demustre que si $x = (a_1 \cdots a_t)$ un ciclo de largo t, entonces $Orb_{S_n}(x) = Orb_{S_n}((1 \cdots t)) = \{(b_1 \cdots b_t) : b_i \in \{1, \cdots, n\}\}$.

ii.- Deduzca que $Z(S_n) = \{id\}$, para $n \geq 3$.

Desarrollo:

i.- Considere $\{b_1, \cdots, b_t\} \subseteq \{1, \cdots, n\}$. Entonces siempre existe una biyección σ tal que $\sigma(a_i) = b_i$. Luego $\sigma x \sigma^{-1} = (b_1 \cdots b_t)$. Por otro lado todo conjugado de x es un cíclo de largo t por lo probado en [1]. Esto implica que $Orb_{S_n}(x) = \{(b_1 \cdots b_t) : b_i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Además como x es cualquier ciclo de largo t, podemos sín pérdida de generalidad asumir que es $(1 \cdots t)$. Luego $Orb_{S_n}(x) = Orb_{S_n}((1 \cdots t)) = \{(b_1 \cdots b_t) : b_i \in \{1, \cdots, n\}\}$.

ii.- Observe que el argumento dado en [1] se extiende a productos de ciclos disjuntos de largos distintos. Luego lo dicho en [i] prueba que la órbita de cualquier elemento no trivial tiene más de un elemento. Pero sabemos que $x \in Z(S_n)$ sí y solamente sí su órbita bajo la acción de conjugación consta sólo de x. Por lo tanto $Z(S_n) = \{id\}$.

3.- **Problema 3:**
Sea $x = (12)(34)(56) \in S_6$. Calcule $|C_{S_6}(x)|$.

Desarrollo: Recordemos que G actúa en $\mathcal{P}(G)$ de la siguiente manera. Sea $S \subseteq G$, entonces $g.S := gSg^{-1}$. Así $G_S = \{g \in G : gSg^{-1} = S\}$. Luego $|\{gSg^{-1} : g \in G\}| = [G : G_S]$. Cuando $S = \{s\}$, decimos que $G_s = C_G(s)$ y entonces $|\{gsg^{-1} : g \in G\}| = [G : C_G(s)]$. Observe que si $x = (12)(34)(56)$ entonces para cualquier $\sigma \in S_n$ tenemos que $\sigma x \sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))(\sigma(5)\sigma(6))$. Luego los conjugados de x son 15, esto pues en la primera transposición el 1 puede ir a $2, 3, 4, 5, 6$ y luego, en la siguiente transposición, uno de los cuatro números retantes puede tomar 3 opciones. Con esto la última transpoción queda fija. Concluimos que $|C_{S_6}(x)| = \frac{6!}{15} = 48$.

4.- **Problema 4:**
Sea $\sigma \in S_m$ un ciclo de largo m.

i.- Demuestre que $|C_{S_n}(\sigma)| = m(n-m)!$.

ii.- Pruebe que $C_{S_n}(\sigma) = \{\sigma^i \tau : 0 \leq i \leq m-1,\ \tau \in S_{n-m}\}$.

iii.- Calcule $|C_{S_7}((123))|$.

Desarrollo:

i.- Recordemos que si $\sigma = (a_1 \cdots a_m)$ entonces $g\sigma g^{-1} = (g(a_1)\cdots g(a_m))$. Luego $g(a_1) \in \{1, \cdots, n\}$, $g(a_2) \in \{1, \cdots, n\} - \{g(a_1)\}$ y así sucesivamente. Es decir fijados los valores de $g(a_1), \cdots, g(a_i)$ tenemos que $g(a_{i+1})$ puede tomar $n-i$ valores. Además de esto si permutamos los valores cíclicamente en una trasposición, obtenemos la misma transposición. Por lo tanto $|\{g\sigma g^{-1} : g \in G\}| = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m}$. Concluimos que $|C_{S_n}(\sigma)| = \frac{mn!}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} = m(n-m)!$.

ii.- Observe que $\langle\sigma\rangle \subseteq C_{S_n}(\sigma)$. Por otro lado $g \in Biy(\{1, \cdots, n\} - \{a_1, \cdots, a_t\})$ cumple con $g\sigma g^{-1} = (g(a_1)\cdots g(a_m)) = \sigma$. Además $|C_{S_n}(\sigma)| = m(n-m)! = |\{\sigma^i\tau : 0 \leq i \leq m-1,\ \tau \in S_{n-m}\}|$, esto pues las biyecciones en S_{n-m} son disjuntas de las potencias de σ. Luego como existe una contensión y los conjuntos tienen igual cardinal, tenemos que $C_{S_n}(\sigma) = \{\sigma^i\tau : 0 \leq i \leq m-1,\ \tau \in S_{n-m}\}$.

iii.- Concluimos que $|C_{S_7}((123))| = 3(7-3)! = 72$.

4.- **Ejercicio:** Sea $\sigma \in S_n$ un producto de r transposiciones disjuntas. Pruebe que $|C_{S_n}(\sigma)| = 2^r r!(n-2r)!$.

Ayudantía 4: En esta ayudantía trabajaremos en torno a la ecuación de clase y sus aplicaciones.

1.- **Problema 1:**
Pruebe que si un grupo G cumple con que $G/Z(G)$ cíclico, entonces G es un grupo abeliano. Concluya que $Inn(G) = \{id\}$.

Demostración:
Sea $G/Z(G) = \{g^i Z(G) : i \in \mathbb{Z}\}$ grupo cíclico. Consideremos $x, y \in G$, entonces $xZ(G) = g^i Z(G)$ e $yZ(G) = g^j Z(G)$, para ciertos $i, j \in \mathbb{Z}$. Es decir $x = ag^i$ e $y = bg^j$, para ciertos $a, b \in Z(G)$. Luego $xy = ag^i bg^j = abg^{i+j} = bag^{j+i} = yx$. Por lo tanto G es un grupo abeliano.

Recordando el isomorfismo visto en la ayudantía anterior, tenemos que $G/Z(G) \cong Inn(G)$. Luego como $G = Z(G)$, tenemos que $Inn(G) = \{id\}$.

2.- **Problema 2:**
Sea G grupo de orden pq donde p y q son primos distintos.
i.- Pruebe que $|Z(G)| \neq q, p$.
ii.- Demuestre que todo grupo G de orden pq no abeliano tiene centro trivial. Calcule el $Z(S_3)$.

Desarrollo:
i.- Observe que si $|Z(G)| = p$ entonces $|G/Z(G)| = q$ primo. Luego $G/Z(G)$ es un grupo cíclico de orden q primo. Usando el problema 1 concluimos que G es un grupo abeliano. Luego $|Z(G)| = pq$ y esto nos lleva a una contradicción. El razonamiento con $|Z(G)| = q$ es análogo.

ii.- Sabemos que $|Z(G)|||G|$ entonces $|Z(G)| \in \{pq, p, q, 1\}$. Luego si $|Z(G)| = pq$ tenemos que $G = Z(G)$, equivalentemente G es abeliano. Además $|Z(G)| \neq p, q$ por la parte [i]. Luego $|Z(G)| = 1$, es decir $Z(G) = \{e\}$.

Por último observe que, como S_3 es no abeliano y tiene orden $6 = 3 \cdot 2$, entonces $Z(S_3) = \{id\}$.

3.- **Problema 3:**
Sea G un grupo de orden p^2, para p primo.
i.- Demuestre que G es abeliano.
ii.- Demuestre que $G \cong C_{p^2}$ o bien $G \cong C_p \times C_p$.

Desarrollo:
i.- Recordemos que como $|G| = p^2$ tenemos que $|Z(G)| \in \{p^2, p\}$. Si $|G| = |Z(G)| = p^2$ tenemos que G es abeliano. Por otro lado si $|Z(G)| = p$, entonces $|G/Z(G)| = p$, luego $G/Z(G)$ es cíclico. Por lo tanto, por el problema 1, G es abeliano.

ii.- Si G tiene un elemento de orden p^2, entonces $G \cong C_{p^2}$. Si esto no sucede, entonces todo elemento distinto de la identidad tiene orden p. Sea $x \in G - \{1\}$ e $y \in G - \langle x \rangle$. Entonces $|\langle x, y \rangle| > |x| = p$, puesto que $y \in \langle x, y \rangle - \langle x \rangle$. Así $|\langle x, y \rangle| = p^2$ y por lo tanto $G = \langle x, y \rangle$. Por otro lado $\psi : G \to \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, definido por $\psi(x^i y^j) = (x^i, y^j)$ es un isomorfismo de grupos. Es decir $G \cong \langle x \rangle \times \langle y \rangle = C_p \times C_p$.

4.- **Problema 4:**
Demuestre que no existen grupos simples de orden p^m, para $m > 1$ y p

primo.

Demostración:

Utilizaremos el teorema de cauchy para grupos abelianos. Este dice que si p primo cumple con $p||G|$, entonces G tiene un subgrupo de orden p.

Recordemos que todo grupo de orden p^m tiene centro no trivial. Así $|Z(G)| = p^t$, para cierto $t \in \{1, \cdots, m\}$. Por lo tanto $p||Z(G)|$. Luego $Z(G)$ tiene un subgrupo de orden p, debido a que este grupo es ciertamente abeliano. A posteriori G tiene un subgrupo de orden p, digamos $H = \langle h \rangle$, para cierto $h \in H$.

Por otro lado si tomamos cualquier $g \in G$ tenemos que $ghg^{-1} = h$, puesto que $h \in Z(G)$. Esto implica que $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$. En otras palabras $H \lhd G$. Por ende G tiene un subgrupo normal de orden p y esto implica que no es simple.

5.- **Problema 5:**

Sea G es un grupo de orden p^3, para cierto p primo, con G no abeliano.

i.- Pruebe que $|Z(G)| = p$.

ii.- Calcule el centro de D_8 y Q_8.

iii.- Calcule $Inn(G)$ y concluya que $Inn(D_8) = Inn(Q_8) = C_2 \times C_2$.

Desarrollo:

i.- Recordemos que como corolario de la ecuación de clase tenemos que todo p-grupo tiene centro no trivial. Luego $|Z(G)| \in \{p^3, p^2, p\}$.

Es evidente que si $|Z(G)| = p^3$ entonces $G = Z(G)$. Lo que es equivalente a que G sea abeliano.

Por otro lado si $|Z(G)| = p^2$ entonces $|G/Z(G)| = p$ primo. Luego $G/Z(G)$ es cíclico y por ende G es abeliano. Finalmente $|Z(G)| = p$.

ii.- Para calcular el centro de Q_8 y D_8 observemos que $|Q_8| = |D_8| = 8$ y estos son grupos no abelianos. Luego $|Z(D_8)| = |Z(Q_8)| = 2$. En el caso del grupo cuaternionico Q_8 tenemos que $\{\pm 1\} \subset Z(G)$. Luego $Z(G) = \{\pm 1\}$. Por otro lado en el caso del grupo diedral $D_8 = \left\langle r, s : r^4 = s^2 = 1,\, sr = r^{-1}s \right\rangle$ tenemos que $1 \in Z(G)$, por ende nos falta un elemento en el centro del grupo. Observe que $sr^2 = r^3sr = r^6s = r^2s$ y $r^2r = rr^2$. Por lo tanto $Z(D_8) = \{1, r^2\}$.

iii.- Para calcular los grupos de automorfismos interiores basta calcular el cociente $G/Z(G)$. Observe que $|G/Z(G)| = p^2$. Luego por el problema 3 tenemos que $G/Z(G)$ es isomorfo a C_{p^2} o $C_p \times C_p$. Si $G/Z(G) \cong C_{p^2}$ entonces G es abeliano. Luego $Inn(G) \cong G/Z(G) \cong C_p \times C_p$. En particular $Inn(D_8) = Inn(Q_8) = C_2 \times C_2$.

6.- **Problema 6:**

Sea $G = Gl_n(\mathbb{F}_p)$ grupo de matrices invertibles sobre $\mathbb{F}_p$.

i.- Calcule el orden del subgrupo $H = \{(a_ij) : a_ii = 1\, a_{ij} = 0\ sii > j$.

ii.- Concluya que $Z(H)$ es no trivial.

iii.- Calcule el orden de cualquier elemento σ conjugado a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $Gl_2(\mathbb{F}_p)$.

Pruebe que $\langle \sigma \rangle \cong C_p$.

Desarrollo:

i.- Para encontrar dicho valor, analicemos el conjunto en cuestión. Sea $A = (a_ij) \in H$. Observe que a_{12} puede tomar cualquier valor en $\mathbb{F}_p$. Lo mismo va a suceder en a_{13} y a_{23}, esto pues en cualquier caso $det(A) = 1 \in \mathbb{F}_p^*$. Así (a_ij) puede tomar cualquier valor en $\mathbb{F}_p$. Por lo tanto tenemos p^α elemnetos diferentes, donde $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$. En síntesis $|H| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Observe que este grupo tiene por orden la mayor potencia de p que divide a $|G|$.

ii.- Como H es un grupo de orden p tenemos, como consecuencia de la ecuación de clase, que $Z(H)$ es no trivial.

iii.- Sea $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $|\sigma| = |w|$. Pero por inducción se puede demostrar que $w^i = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $|w| = p$ y por lo tanto $|\sigma| = p$. Concluimos que como $|\langle\sigma\rangle| = |\sigma| = p$, entonces $\langle\sigma\rangle \cong C_p$.

Ayudantía 5: En esta ayudantía tiene por objetivo demostrar el teorema general de Cauchy y trabajar con sus aplicaciones.

1.- **Problema 1:**
Sea G un grupo de orden n. Considere la acción de $H = G \times C_p$ sobre G^p vía:

$$(g, a^k)(g_1, \cdots, g_p) = (gg_{1+k}, \cdots, gg_{p+k}),\ \forall g, g_i \in G,$$

donde $C_p = \langle a \rangle$.

i.- Suponga que G no tiene elementos de orden p. Calcule el número de elementos de cada órbita en G^p.
ii.- Pruebe que bajo la misma hipótesis de [i] tenemos que $p \nmid n$.
iii.- Concluya que si $p|n$ entonces existe un subgrupo H de G con $|H| = p$.
iv.- Concluya que si $n \neq 0$ en $\mathbb{F}_p$ entonces $n^{p-1} = 1$.

Desarrollo:

i.- Sean $O = Orb((g_1, \cdots, g_p))$, $S = Stab((g_1, \cdots, g_p))$ la órbita y el estabilizador de $(g_1, \cdots, g_p) \in G^p$ respectivamente. Recordemos que $|O| = \frac{|H|}{|S|}$. Luego debemos encontrar el número de elemntos del estabilizador. Observe que $(g_1, \cdots, g_p) = (g, a^k)(g_1, \cdots, g_p) = (gg_{1+k}, \cdots, gg_{p+k})$ sí y solamente sí $gg_{i+k} = g_i$, $\forall i$. Luego si $k = 0$ entonces $gg_i = g_i$, así $g = 1$.

Por otro lado si $k \neq 0$, entonces $gg_{i+2k} = g_{i+k}$. Luego $g^2 g_{i+2k} = g_i$. Por inducción $g^t g_{i+tk} = g_i$. Luego $g^p g_i = g^p g_{i+pk} = g_i$. Por lo tanto $g^p = 1$. Pero por hipótesis esto implica que $g = 1$. Esto tiene por consecuencia que $g_1 = g_{1+k} = \cdots = g_{1+pk}$, es decir todas las coordenadas son iguales, puesto que $\langle k \rangle \cong C_p$.

Por lo tanto $S = \{1\} \times C_p$, si $g_1 = \cdots = g_p$ o bien $S = \{1\} \times \{1\}$. Concluimos que $|O| = n$, si $g_1 = \cdots = g_p$ y $|O| = np$, en otro caso.

ii.- Recordemos que toda acción de grupo, divide el conjunto sobre el que actua en órbitas disjuntas. Observe que la órbita de tamao n es única, pues $O = O((g, \cdots, g)) = O((1, \cdots, 1))$. Luego $n^p = |G^p| = n + npN$, donde N es el número de órbitas de tamao np. Dividiendo por n obtenemos que $n^{p-1} = 1 + pN$, es decir $p|(n^{p-1} - 1)$. Luego si $p|n$ tenemos que $p|1$, lo que es contradictorio. Por lo tanto $p \nmid n$.

iii.- Por contrapositivo, si $p|n$ entonces existe solución no trivial de $x^p = 1$ en G. Digamos $g \in G$. Tomando $H = \langle g \rangle \leq G$ tenemos lo pedido.

iv.- Observe que $n \neq 0$ en $\mathbb{F}_p$ implica que $p \neq n$. Tomando el grupo $G = C_n$, donde no existe solución no trivial de la ecuación $x^p = 1$, tenemos que $p|(n^{p-1} - 1)$. Es decir $n^{p-1} = 1$ en $\mathbb{F}_p$.

2.- **Problema 2:**
Sea G grupo de orden p^n donde $n \geq 1$ y p es primo.

i.- Pruebe que G tiene un subgrupo normal H de orden p.
ii.- Demuestre que G tiene un subgrupo normal H_s de orden p^s, para cualquier $s \leq n$.

Desarrollo:

i.- Observe que por lo dicho en la ayudantía previa, tenemos que $|Z(G)| = p^m$, cierto $1 < m \leq n$. Por lo tanto tenemos, por el teorema de Cauchy, un subgrupo H de orden p en G. Ahora bien como $H \leq Z(G)$ tenemos que $H \triangleleft G$.

ii.- Razonaremos por inducción. Si $n = 1$ es trivial. Para $n = 2$ sabemos por [i] que existe $H \triangleleft G$, con $|H| = p$. Además $G, \{1\} \triangleleft G$ de orden p^2 y 1 respectivamente.

Supongamos que la afirmación es cierta para $n \in \mathbb{N}$. Sea G grupo de orden p^{n+1}. Entonces por [i] tenemos que existe $H \triangleleft G$ con $|H| = p$. Equivalentemente G/H es un grupo de orden $|G/H| = p^n$. Por hipótesis de inducción, existe $K_s/H \triangleleft G/H$, con $|K_s/H| = p^s$. Luego $|K_s| = p^{s+1}$. Definimos $H_s = K_{s-1}$. Entonces si tomamos $g \in G, x \in K_s$ tenemos que $gxg^{-1} \in H_sH \subset H_s$. Por lo tanto $H_s \triangleleft G$. Luego tenemos grupos normales de todos los ordenes posibles. Observe que $H_0 = \{1\}$ y $H_1 = H$.

3.- **Problema 3:**
Sea G un grupo de orden pq, para $p < q$ primos.
i.- Demuestre que G tiene un subgrupo normal de orden q.
ii.- De un contraejemplo para la normalidad de un grupo de orden p.

Desarrollo:

i.- Sabemos que $q||G|$, luego por el teorema de Cauchy tenemos que existe un subgrupo H de G de orden q. Luego como $[G : H] = p$ menor primo que divide al orden de G, tenemos que, por lo visto en la ayudantía 2, $H \triangleleft G$.

ii.- Considere $G = S_3$, donde $|G| = 3 \cdot 2$. Dicho grupo tiene un sólo subgrupo normal. Este es el grupo alternante A_3 de orden 3. Así no existen subgrupos normales de orden 2.

3.- **Ejercicio:** Pruebe que si G es un grupo abeliano de orden pq, entonces G es cíclico.

4.- **Problema 4:**
Encuentre todos los grupos abelianos simples.

Desarrollo: Observe que si G es un grupo abeliano simple entonces sus unicos subgrupos son los triviales. Esto último debido a que todo subgrupo de un grupo abeliano es normal. Ahora bien $p||G|$, para cierto p primo. Por el teorema de Cauchy tenemos que existe H subgrupo de G con $|H| = p$. Luego $G = H \cong C_p$.

Ayudantía 6: Esta ayudantía tiene por objetivo comenzar a trabajar con los teoremas de Sylow.

1.- **Problema 1:**
Sean $H, K \triangleleft G$ tales que $H \cap K = \{1\}$ y $|G| = |H||K|$. Pruebe que $G \cong H \times K$.

Demostración:
Sea $\phi : H \times K \to G$, $\phi(h, k) = hk$ función entre grupos. Observe que $\phi(h_1h_2, k_1k_2) = h_1h_2k_1k_2$. Por otro lado $\phi(h_1, k_1)\phi(h_2k_2) = h_1k_1h_2k_2$. Pero por la normalidad de H y K tenemos que existen $h_3 \in H$, $k_3 \in K$ tales que $h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_3k_2 = h_1h_3k_1k_2$. Luego $h_2k_3 = h_3k_1$, es decir $h_2(k_3k_1^{-1})h_2^{-1} = h_3h_2^{-1} \in H \cap K$. Luego $h_3 = h_2$ y $k_3 = k_1$. Por lo tanto $\phi(h_1, k_1)\phi(h_2, k_2) = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1k_2 = \phi(h_1h_2, k_1k_2)$. Es decir ϕ es homomorfismo de grupos.

Observe que $\ker(\phi) = \{(h, k) : hk = 1\}$. Pero si $hk = 1$, entonces $h = k^{-1} \in H \cap K$. Por ello $h = k = 1$. Luego $\ker(\phi) = \{(1, 1)\}$, es decir ϕ es inyectivo. Además como los conjuntos finitos de partida y llegada tienen igual número de elementos, tenemos que ϕ es biyectiva.

1.- **Ejercicio:** Sea G grupo de orden 50 que tiene un grupo normal de orden 2. Pruebe que $G \cong C_{50}$ o bien $G \cong C_5 \times C_{10}$.

2.- **Problema 2:**
Sea G grupo.
i.- Encuentre todos los grupos G de orden 21 salvo isomorfía.
ii.- Encuentre todos los grupos G de orden 15.
iii.- Generalice estas ideas.

Desarrollo:
i.- Sea G grupo tal que $|G| = 21 = 7 \cdot 3$. Entonces existe $S \leq G$ un 7-Sylow y $T \leq G$ un 3-Sylow. Observe que $n_7 \equiv 1(7)$ y que $n_7|3$. Por lo tanto $n_7 = 1$, es decir $S \triangleleft G$. Además $n_3 \equiv 1(3)$ y $n_3|7$. Así $n_3 = 1, 7$. Dividamos el análisis en casos.

Si $n_3 = 1$, entonces $T \triangleleft G$. Luego $H, T \triangleleft G$, con $H \cap T = \{1\}$ y $|G| = |H||T|$. Por lo tanto $G \cong H \times K \cong C_3 \times C_7 \cong C_{21}$, por teorema chino.

Si $n_3 = 7$, tenemos que existen 7 subgrupos de orden 3 en G. Sea $T = \{1, a, a^2\}$ grupo de orden 3. Como $S \triangleleft G$ tenemos que $aSa^{-1} = S$. Luego si $S = \{1, b, \cdots, b^6\}$ entonces $aba^{-1} = b^i$, cierto $i \in \{1, \cdots, 6\}$. Observe que, por inducción, $ab^ka = b^{ik}$ y $a^nba^{-n} = b^{i^n}$. Luego requerimos que $b = a^3ba^{-3} = b^{i^3}$, es decir $i^3 \equiv 1(7)$. Por lo tanto $i \in \{1, 2, 4\}$. Observe que si $i = 1$ entonces G abeliano y por lo tanto $n_3 = 1$. Concluimos que:

$$G \cong \langle a, b : b^7 = a^3 = 1,\ aba^{-1} = b^2\rangle,$$

o bien:

$$G \cong \langle a, b : b^7 = a^3 = 1,\ aba^{-1} = b^4\rangle.$$

ii.- Sea G grupo de orden $15 = 3 \cdot 5$. Entonces existe $S \leq G$ un 5-Sylow y $T \leq G$ un 3-Sylow. Observe que $n_5|3$ y $n_5 \equiv 1(5)$. Luego $n_5 = 1$, es decir

$S \triangleleft G$. Análogamente $n_3|5$ y $n_3 \equiv 1(3)$. Entonces $n_3 = 1$, es decir $T \triangleleft G$. Luego $G \cong H \times T \cong C_3 \times C_5 \cong C_{15}$.

iii.- En general si $|G| = pq$, con $p > q$ y $p \neq 1(q)$ entonces $G \cong C_p \times C_q \cong C_{pq}$. En otro caso hay que aplicar el prodecimiento visto en [i], que es completamente general.

3.- **Problema 3:**
Sea G grupo de orden 312. Pruebe que G tiene un p-subgrupo de Sylow normal, para cierto p primo. Determine dicho número primo.

Desarrollo:
Evidentemente usaremos los teoremas de Sylow. Observe que $|G| = 312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$. Observe que $n_{13}|24$ y $n_{13} \equiv 1(13)$. Luego $n_{13} \in \{1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24\}$. Pero todos los valores menos el 24 son menores y $24 \equiv 11(13)$. Por ello $n_{13} = 1$. Luego existe un 13-Sylow normal en G. Esto nso dice que G no es simple.

4.- **Problema 4:**
Sea G grupo.
i.- Pruebe que no existen grupos de orden 35 simples.
ii.- Encuentre todos los grupos de orden $3^2 \cdot 5$.

Desarrollo:
i.- Si G es un grupo de orden $35 = 7 \cdot 5$. Entonces $n_7|5$ y $n_7 \equiv 1(7)$. Luego $n_7 = 1$, es decir existe $H \triangleleft G$ un 7-Sylow. Por otro lado $n_5|7$ y $n_5 \equiv 1(5)$. Luego $n_5 = 1$, es decir existe $S \triangleleft G$ un 5-Sylow. Luego como $S \cap H = \{1\}$ tenemos que $G \cong H \times S \cong C_7 \times C_5 \cong C_{35}$. En particular G no es simple.

ii.- Sea G grupo de orden $3^2 \cdot 5$. Entonces $n_3|5$ y $n_3 \equiv 1(3)$. Luego $n_3 = 1$, es decir existe $H \triangleleft G$ un 3-Sylow. Por otro lado $n_5|3^2$ y $n_5 \equiv 1(5)$. Luego $n_5 = 1$, es decir existe $S \triangleleft G$ un 5-Sylow. Luego como $S \cap H = \{1\}$ tenemos que $G \cong H \times S \cong C_9 \times C_5 \cong C_{45}$ o bien $G \cong C_3 \times C_3 \times C_5$.

5.- **Problema 5:**
Pruebe que todo grupo de orden $56 = 7 \cdot 2^3$ no es simple.

Demostración:
Observe que por el teorema de Sylow existen $T, H \leq G$ que son 2-Sylow y 7-Sylow respectivamente. Además $n_7|2^3$ y $n_7 \equiv 1(7)$. Luego $n_7 \in \{1, 8\}$. Por otro lado $n_2|7$ y $n_2 \equiv 1(2)$, esto implica que $n_2 \in \{1, 7\}$. Observe que si $n_2 = 1$ o $n_7 = 1$ entonces G tiene un 2-Sylow o un 7-Sylow normal, respectivamente. Luego G no es simple. Por lo tanto solo debemos descartar el caso $n_2 = 7, n_7 = 8$.

En efecto, si T es un 2-Sylow y H es un 7-Sylow entonces $H \cap T = \{1\}$. Esto pues si $x \in H \cap T$ entonces $|x||7, 2^3$. Luego $|x| = 1$, es decir $x = 1$. Además los 2-Sylow se intersectan a lo más en 4 elementos, pues si lo hacen en 8 de estos, resultan ser el mismo subgrupo. También todos los 7-Sylow son cílicos, luego si dos de estos se intersectan en un elemento no trivial, los subgrupos resultan ser los mismos. Esto último se debe a que si $H_1 \cap H_2 \subseteq \{1, x\}$ entonces $\langle x \rangle \cong C_7$, luego $|H_1 \cap H_2| = 7$, es decir $H_1 = H_2 = H_1 \cap H_2$. Por lo tanto en G tenemos por lo mínimo $1 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 4 = 77$ elementos. Esto es contradictorio.

Ayudantía 7: Esta ayudantía tiene por objetivo comenzar a trabajar con los teoremas de Sylow.

1.- **Problema 1:**
Sea G grupo de orden $p^t m$, con $(m,p)=1$. Por lo teoremas de Sylow, existe un p-subgrupo de Sylow $S \subset G$. Además los demás p-subgrupos de Sylow son conjugados de S.

i.- Pruebe que el número n_p de p-subgrupos de Sylow diferentes es $[G : N_G(S)]$.

ii.- Deduzca que $n_p | m$.

iii.- Pruebe que si $n_p = 1$ entonces $S \triangleleft G$.

Demostración:

i.- Observe que $gSg^{-1} = tSt^{-1}$ sí y solamente sí $gt^{-1} \in N_G(S)$. Luego por cada clase en $G/N_G(S)$ tenemos un conjugado de S distinto. Por ello $n_p = |G/N_G(S)| = [G : N_G(S)]$.

ii.- Observe que $m = [G : S] = [G : N_G(S)][N_G(S) : G]$. Luego $n_p | m$.

iii.- Observe que si $n_p = 1$ entonces para cualquier $g \in G$ tenemos que $gSg^{-1} = S$. Luego $S \triangleleft G$.

2.- **Problema 2:**
Sea G grupo de orden 39.

i.- Encuentre todos los grupos de dicho orden, salvo isomorfía.

ii.- Encuentre todos los elementos de orden 3 en dichos grupos.

iii.- Suponga que G es abeliano. Calcule su grupo de automorfismos.

Desarrollo:

i.- Usaremos los teoremas de Sylow. Observe que $n_{13}|3$ y $n_{13} \equiv 1(13)$. Luego $n_{13} = 1$. Es decir existe $T \leq G$ un 13-Sylow normal. Por otro lado $n_3|13$ y $n_3 \equiv 1(3)$. Luego $n_3 = 1$ o $n_3 = 13$. Dividamos el análisis en casos:

a.- Si $n_3 = 1$. Entonces existe $S \leq G$ un 13-Sylow normal. Luego como $|G| = |S||T|$ y $S \cap T \subset \{x \in G : |x||3,5\} = \{e\}$, tenemos que $G \cong C_3 \times C_{13} \cong C_{39}$.

b.- Si $n_3 = 13$. Entonces tenemos que existen 13 subgrupos de orden 3 en G. Sea $S = \{1, a, a^2\}$ grupo de orden 3. Como $T \triangleleft G$ tenemos que $aTa^{-1} = T$. Luego si $T = \{1, b, \cdots, b^{12}\}$ entonces $aba^{-1} = b^i$, cierto $i \in \{1, \cdots, 12\}$. Observe que, por inducción, $ab^k a^{-1} = b^{ik}$ y $a^n ba^{-n} = b^{i^n}$. Luego requerimos que $b = a^3ba^{-3} = b^{i^3}$, es decir $i^3 \equiv 1(13)$. Por lo tanto $i \in \{1,3,9\}$. Observe que si $i=1$ entonces G abeliano y por lo tanto $n_3 = 1$. Concluimos que:

$$G \cong G_1 = \langle a, b : b^{13} = a^3 = 1,\, aba^{-1} = b^3 \rangle,$$

o bien:

$$G \cong G_2 = \langle a, b : b^{13} = a^3 = 1,\, aba^{-1} = b^9 \rangle.$$

Observe que $G_2 \cong G_2$, pues $\phi : G_1 \to G_2$ definido por $\phi(a) = a^2, \phi(b) = b$ es un una homomorfismo que envia generadores en generadores, luego es un isomorfismo. Observe que está bien definida pues $\phi(ab) = a^2 b = ab^9 a = b^{81}a^2 = b^3 a^2 = \phi(b^3 a)$. Luego $G_1 \cong G_2$.

ii.- Recordemos que todos los elementos de orden 3 generan subgrupos de G de orden 3. Dichos subgrupos, en el caso abeliano $G \cong C_{39} = \langle \sigma \rangle$ solo uno y es $H = \langle \sigma^{13} \rangle$. Por otro lado si G no es abeliano, entonces son los conjugados de $S = \langle a \rangle$, es decir los subgrupos $S' = b^i S b^{-i} = \langle b^i a b^{-i} \rangle$, para

$i \in \{0, \cdots, 12\}$. Luego los elementos de orden 3 en G son los elementos $b^i a b^{-i}, b^i a^2 b^{-i}$ donde $i \in \{0, \cdots, 12\}$.

iii.- Observe que si G es un grupo abeliano, entonces $G \cong C_{39}$. Luego por lo visto en la ayudantía 1 tenemos que $Aut(G) \cong (\mathbb{Z}/39\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^* \cong C_2 \times C_{12}$.

3.- **Problema 3:**
Sea $G \cong S_5$ grupo de permutaciones.
i.- Encuentre un 5-Sylow de G. Demuestre que no es normal.
ii.- Demustre que existen 6 subgrupos de orden 5 en G.

Desarrollo:
i.- Observe primero que $|G| = 2^3 \cdot 5 \cdot 3$. Luego H es un 5-Sylow sí y solamente sí tiene orden 5.

Considere el subgrupo $H = \langle (12345) \rangle = \{id, (12345), (24135), (31425), (43215)\}$ de orden 5. Recordemos que $\sigma(12345)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5))$. Luego $H \triangleleft G$ si contiene a todas las permutaciones de largo 5. Pero $(42315) \notin H$. Luego H no es normal en G.

ii.- Observe que $n_5 \in \{1, 3, 6, 12, 24, 2, 4, 8\}$. Pero $n_5 \cong 1(5)$. Luego $n_5 \in \{1, 6\}$. Luego si $n_5 = 1$ entonces $H \triangleleft G$, lo que claramente es falso. Luego $n_5 = 6$. Por ello existen 6 subgrupos de orden 5 en G.

4.- **Problema 4:**
Sea $G = Q_8$. Encuentre una cadena de subgrupos de G tales que :

$$N_0 = \{e\} \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots N_t = G,$$

y $N_i / N_{i-1} \cong C_2$, para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$.

Desarrollo: Recordemos que $N_3 = Q_8 = \langle i, j : j^4 = i^4 \, ij = j^3 i \rangle$, en donde identificamos $i^2 = j^2 = -1$. Sea $N_3 = \langle i \rangle = \{-1, -i, i, 1\}$. Observe que $jij^{-1} = -jij = j^2 i = -i$. Luego $N_2 \triangleleft G$ con cociente $|G/N_2| = 2$, luego $G/N_2 \cong C_2$. Considere entonces $N_1 = \langle -1 \rangle = \{1, -1\}$. Como $N_1 = Z(G)$ tenemos que $N_1 \triangleleft N_2$ con $|N_2/N_1| = 2$. Luego $N_2/N_2 \cong C_2$. Por último $N_0 = \{1\}$. Observe que salvo isomorfía la cadena que damos es:

$$\{1\} \triangleleft C_2 \triangleleft C_4 \triangleleft Q_8.$$

Observe tambien que como N_2 debe tener 4 elementos tenemos que $\pm i, \pm j$ o $\pm k = \pm ij$ es un elemento de N_2. Luego $N_2 = \langle i \rangle, \langle j \rangle$ o $\langle k \rangle$ y el único subgrupo normal de indice 2 de N_2 es $N_1 = \langle -1 \rangle$, pues dicho grupo debe tener 2 elementos. En síntesis, salvo isomorfismo, la cadena anterior es única.

1.- **Ejercicio:** Replique esto para $G = D_{16}$.

Ayudantía 8: En esta ayudantía estudiaremos las consecuencias teóricas que tienen los teoremas de Sylow.

1.- **Problema 1:**
Sea $p \neq 2$ primo. Si G es un grupo de orden $2p$ pruebe que $G \cong C_{2p}$ o bien $G \cong D_{2p}$.

Demostración:
Usaremos los teoremas de Sylow. Sabemos que existen $T \leq G$ un 2-Sylow de G y $S \leq G$ un p-Sylow de G. Observe que $n_p|2$ y $n_p \equiv 1(p)$. Luego $n_p = 1$, equivalentemente $S \lhd G$. Por otro lado $n_2 \in \{1, p\}$. Dividamos nuestro análisis dependiendo del valor de n_2.

Si $n_2 = 1$, entonces $T \lhd G$. Además $T \cap S = \{1\}$, pues si $x \in T \cap S$ entonces $|x||2, p$, luego $|x| = 1$. Por lo tanto $G \cong T \times S \cong C_p \times C_2 \cong C_{2p}$.

Si $n_2 = p$, entonces existen p 2-subgrupos de Sylow de G. Entonces usamos el procedimiento visto en la ayudant"ia anterior. En efecto, si $T = \langle b \rangle$ y $S = \langle a \rangle$ entonces $bab^{-1} = a^i$, donde $i^2 \equiv 1(p)$. Por lo tanto $i \equiv 1(p)$ o bien $i \equiv -1(p)$. Si $i \equiv 1(p)$, entonces $ab = ab$ y por ende G es abeliano, lo que nos lleva a una contradicción, pues $n_2 \neq 1$. Por lo tanto $bab^{-1} = a^{-1}$, por lo tanto:

$$G \cong \langle a, b : a^p = b^2 = 1, \, bab^{-1} = a^{-1} \rangle \cong D_{2p}.$$

1.- **Ejercicio:** Si $p \equiv 1(4)$ encuentre los grupos G de orden $4p$.

2.- **Problema 2:** *Argumento de Fratini.*
Sea G grupo y $H \leq G$. Si P es un p-subgrupo de Sylow de H entonces $G = N_G(P)H$.

Demostración:
Sabemos que siempre $G \supseteq N_G(P)H$. Por lo tanto debemos demostrar la contensión contraria. Observe que si P es un p-Sylow de H, entonces $\{hPh^{-1} : h \in H\} = Syl(H)$. Sea $g \in G$, como $H \lhd G$ tenemos que $gPg^{-1} \subseteq H$. Luego como $|gPg^{-1}| = |P|$ tenemos que $gPg^{-1} \in Syl(H)$. Luego $gPg^{-1} = hPh^{-1}$, para cierto $h \in H$. Es decir $gh^{-1} \in N_G(P)$. Luego $g \in N_G(P)H$. Concluimos que $G = N_G(P)H$.

3.- **Problema 3:**
Sea $P \in Syl_p(H)$ y $H \leq K$.

i.- Si $P \lhd H$ y $H \lhd K$ entonces $P \lhd K$.

ii.- Deduzca que si $P \in Syl_p(G)$ entonces $H = N_G(P)$ cumple con $N_G(H) = H$.

Desarrollo:

i.- Sabemos que $P \lhd H$ sí y solamente sí P es el único p-Sylow de H. Sea $g \in K$ entonces como $H \lhd K$ tenemos que $gPg^{-1} \subset H$. Como $|gPg^{-1}| = |P|$ tenemos que gPg^{-1} es un p-Sylow de H. Luego $gPg^{-1} = P$. Es decir $P \lhd K$.

ii.- Si $P \in Syl_p(G)$, entonces $P \lhd N_G(P) = H$ por definición de $N_G(P)$. Luego como $H \lhd N_G(H) = K$ tenemos que $P \lhd N_G(H)$. Es decir $N_G(H) \subseteq H = N_G(P)$, pues $N_G(P)$ es el maximo subgrupo de G tal que P es normal.

Además siempre se cumple que $H \subseteq N_G(H)$. Por lo tanto $H = N_G(H)$, es decir $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

4.- **Problema 4:**
Sea G un p-grupo. Demuestre que si $H \subsetneq G$ es un subgrupo propio de G, entonces $H \subsetneq N_G(H)$.

Demostración: Pendiente.

Ayudantía 9: En esta ayudantía estudiaremos un tipo especial de grupos, llamados grupos solubles.

1.- **Problema 1:**
Sea G grupo abeliano. Es un hecho que $G \cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_t}$. Demustre que G es un grupo soluble.

Demostración: Considere $H_i = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_i}$ subgrupo de G. Como G es abeliano $H_i \triangleleft G$, en particular $H_i \triangleleft H_{i+1}$. Además $H_{i+1}/H_i \cong C_{n_{i+1}}$ grupo cíclico. Esto demuestra que G es soluble. Así todo grupo abeliano es soluble.

2.- **Problema 2:** Sea $p \neq 2$ primo. Sea $G = D_{2p}$ grupo dihedral. Demuestre que G es soluble.

Demostración: Sabemos que $G = \langle a, b : a^p = b^2 = 1, ba = a^{-1}b \rangle$. Considere $H = \langle a \rangle$. Entonces $[G : H] = 2$. Luego, por lo demostrado en las primeras ayudantías, $H \triangleleft G$. Además $|G/H| = 2$, por lo tanto $G/H \cong C_2$. Por otro lado $H/\{1\} \cong H \cong C_p$. Si utilizamos la cadena de subgrupos:

$$\{1\} \triangleleft H \triangleleft G,$$

con cocientes $G/H \cong C_2$, $H \cong C_p$, entonces concluimos que G es soluble.

2.- **Ejercicio:** Demuestre que D_{2n} es soluble para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

3.- **Problema 3:**
Sea G grupo.
i.- Si $|G| = 15$, pruebe que G es soluble.
ii.- Demuestre que S_4 es soluble.

Desarrollo:
i.- Sabemos que si $|G| = 15$ entonces, por lo demostrado en las ayudantías previas vía teoremas de Sylow, tenemos que $G \cong C_{15}$. Luego $\{e\} \triangleleft G$ es una cadena que hace a G soluble.

ii.- Sabemos que siempre $A_4 \triangleleft S_4$. Ahora escribamos A_4 por extensión. En efecto, $A_4 = \{id, (123), (132), (124), (142), (124), (243), (12)(34), (14)(32)\}$. Entonces $K_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(32)\} \cong C_2 \times C_2$ es un subgrupo normal de S_4, pues para cualquier $\sigma \in S_4$ tenemos que $\sigma(ij)(kl)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j))(\sigma(k)\sigma(l)) \in K_4$, para cualquiera i, j, k, l. Por último consideremos $\{id, (12)(34)\} \cong C_2$ subgrupo normal de K_4, pues K_4 es abeliano. Así tenemos:

$$\{id\} \triangleleft C_2 \triangleleft K_4 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4,$$

donde $K_4/C_2 \cong C_2$, $A_4/K_4 \cong C_3$ y $S_4/A_4 \cong C_2$. Por lo tanto S_4 es un grupo soluble.

3.- **Ejercicio:** Pruebe que S_3 es soluble.

4.- **Problema 4:**
Pruebe que si H, K son grupos solubles entonces $G = H \times K$ es soluble.

Demostración: Escribamos las hipótesis. Sabemos que existe una cadena de subgrupos de H:

$$\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_n = H,$$

donde H_i/H_{i-1} es cíclico para todos i y además existe una cadena de subgrupos de K:

$$\{e\} = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \cdots \triangleleft K_t = K,$$

tal que K_i/K_{i-1} es cíclico para cualquiera i. Recordemos que $I \times J \triangleleft A \times B$ sí y solamente si $(a,b)(i,j)(a^{-1},b^{-1}) = (aia^{-1}, ajb^{-1}) \in I \times J$, para cualquier $a \in A$, $b \in B$, $i \in I$, $j \in J$. Luego lo anteior sucede sí y solamente sí $I \triangleleft A$ y $J \triangleleft B$. Aplicando esto a nuestro caso, obtenemos una cadena de subgrupos de G:

$$H_0 \times K_0 \triangleleft H_1 \times K_0 \triangleleft \cdots \triangleleft H_n \times K_0 \triangleleft H_n \times K_1 \triangleleft \cdots H_n \times K_t,$$

donde $(H_0 \times K_i)/(H_0 \times H_{i-1}) \cong H_i/H_{i-1}$ cíclico y $(H_n \times K_i)/(H_n \times K_{i-1}) \cong K_i/K_{i-1}$ cíclico. Por lo tanto $H \times K$ es soluble.

5.- **Problema 5:**
Sea $\phi : G \to G'$ homomorfismo de grupos.

i.- Demustre que si G es soluble, entonces $\phi(G)$ es soluble.

ii.- Pruebe que si $G = H \times K$ es soluble, entonces H y K son grupos solubles.

Desarollo:

i.- Sabemos que existe una cadena de subgrupos de G:

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_t = G,$$

donde G_i/G_{i-1} es un grupo cíclico. Considere entonces la cadena de subgrupos de la imagen de G:

$$\{e\} = \phi(G_0) \subseteq \phi(G_1) \subseteq \cdots \subseteq \phi(G).$$

Observe que si $x = \phi(g_i) \in \phi(G_i)$ e $y = \phi(g_{i+1}) \in \phi(G_{i+1})$, entonces $yxy^{-1} = \phi(g_{i+1}g_ig_{i+1}^{-1}) \in \phi(G_i)$. Luego $\phi(G_i) \triangleleft \phi(G_{i+1})$.
Considere el homomorfismo $\psi : G_i \to \phi(G_i)/\phi(G_{i-1})$, definido por $\psi(g) = \overline{\phi(g)}$. Entonces claramente ψ es sobreyectiva, con núcleo $\ker(\psi) = \{g \in G_i : \phi(g) \in \phi(G_{i-1})\} = G_{i-1}(\ker(\phi) \cap G_{i-1})$. Por lo tanto $\phi(G_i)/\phi(G_{i-1}) \cong G_i/G_{i-1}(\ker(\phi) \cap G_{i-1}) \hookrightarrow G_i/G_{i-1}$ cíclico. Por lo tanto $\phi(G_i)/\phi(G_{i-1}$ es cíclico. Esto demuestra que $\phi(G)$ es soluble.

ii.- Considere $\pi_H : G \to H$ proyección en la primera coordenada. Esta función es un homomorfismo sobreyectivo. Por lo tanto, por [i], H es soluble. Análogamente, tomando la imagen por π_K de G, obtenemos que K es soluble.

Ayudantía 10: En esta ayudantía estudiaremos un tipo especial de producto, este es el producto semidirecto de grupos.

1.- **Problema 1:**
Para $n > 2$ considere $\phi : C_2 \to Aut\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ homomorfismo definido por $\phi(a)(x) = (-1)^a x$. Demuestre que $D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ltimes_\phi C_2$.

Demostración: Sabemos que $D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$. Además $N = \langle a\rangle \triangleleft D_{2n}$, pues $bab^{-1} = a^{-1} \in N$. Observe que $N \cong C_n$. Considere $H = \langle b\rangle \cong C_2$. Observe que $b \notin N$. Luego $|N \cap H| = 1$, por ello $H \cap N = \{1\}$. Ahora bien, como $N \triangleleft D_{2n}$, HN tiene estructura de grupo y como $|HK| = \frac{|H||N|}{|H\cap N|} = |H||N| = |D_{2n}|$, tenemos que $D_{2n} = HN$.

Lemma 1. *Si $G = NH$ con $H \cap N = \{1\}$ y $N \triangleleft G$, entonces para cualquier $g \in G$ existen únicos $h \in H, n \in N$ tales que $g = nh$. Además $G \cong N \ltimes_\phi H$, para $\phi(h)(n) = hnh^{-1}$.*

Proof. Por lo dicho en el lo previo al problema (es completamente general) tenemos que $G = NH$. Luego para cualquier $g \in G$ existen $h \in Hn \in N$ tales que $g = nh$. Si existe otro par (h_1, n_1) tal que $g = nh = n_1h_1$ entonces $h_1h^{-1} = n^{-1}n_1 \in H \cap N = \{1\}$. Luego $h = h_1$ y $n = n_1$.
Considere la función $f : G \to N \ltimes_\phi H$ definida por $f(g) = (n, h)$. Está función esta bien definida por lo dicho anteriormente. Además es claramente sobreyectiva. Demostremos que es homomorfismo de grupos. Observe que $f(g_1)f(g_2) = (n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\phi(h_1)(n_2), n_1n_2)$. Así $f(g_1)f(g_2) = (n_1h_1n_2h_1^{-1}, n_1n_2)$. Por otro lado se cumple que $g_1g_2 = n_1h_1n_2h_2 = n_1(h_1n_2h_1^{-1})(n_1n_2)$. Luego $f(g_1g_2) = (n_1h_1n_2h_1^{-1}, n_1n_2) = f(g_1)f(g_2)$. Por ellos f es homomorfismo de grupos y como $f(g) = (1, 1)$ implica que $g = 1$ tenemos que f es isomorfismo de grupos. Luego $G \cong H \rtimes_\phi N$, para $\phi(h)(n) = hnh^{-1}$. □

En nuestro caso tenemos que $D_{2n} \cong C_n \ltimes_\phi C_2$, para $\phi(a)(b) = bab^{-1} = a^{-1}$.

2.- **Problema 2:** Sean G_1, G_2 grupos y $\phi : G_1 \to Aut(G_2)$ homomorfismo de grupos.
i.- Pruebe que $G_2 \times \{e\} \triangleleft G_2 \ltimes_\phi G_1$.
ii.- Demuestre que $\{e\} \times G_1 \triangleleft G_2 \ltimes_\phi G_1$ sí y solamente sí $\phi(a) = id$, para todo $a \in G_1$.

Desarrollo:
i.- Sea $(g_2, e) \in G_2 \times \{e\}$. Considere $(h_2, h_1) \in G_2 \ltimes_\phi G_1$ elemento cualquiera.
Entonces $(h_2, h_1)(g_2, e)(h_2, h_1)^{-1} = (h_2, h_1)(g_2, e)(\phi(h_1^{-1})(h_2^{-1}), h_1^{-1})$.
Lo que es igual a $(h_1\phi(h_1)(g_2), h_1)(\phi(h_1^{-1})(h_2^{-1}), h_1^{-1}) = (*, e) \in G_2 \times \{e\}$.

ii.- Supongamos que $\phi(a_1) = id_{G_2}$ para cualquier $a_1 \in G_1$.
Entonces $(a_2, a_1)(e, g_1)(a_2, a_1)^{-1} = (a_2, a_1)(e, g_1)(\phi(a_1^{-1})(a_2^{-1}), a_1^{-1})$.
Multiplicando los primeros términos obtenemos que lo anterior es igual

a $(a_1\phi(a_1)(e_2), a_1g_1)(\phi(a_1^{-1})(a_2^{-1}), a_1^{-1}) = (a_2e, a_1g_1)(a_2^{-1}, a_1^{-1})$, luego $(a_2, a_1)(e, g_1)(a_2, a_1)^{-1} = (e, a_1g_1a_1^{-1})$. Por ello $\{e\} \times G_1 \lhd G_2 \ltimes_\phi G_1$. Inversamente si $\{e\}\times G_1 \lhd G_2 \ltimes_\phi G_1$ entonces $(h_2, h_1)(g_2, e) = (e, t_1)(h_2, h_1)$, para cierto $t_1 \in G_1$. Es decir $(a_2\phi(g_1)(e), a_1g_1) = (e\phi(a_1)(a_2), t_1a_1)$. Por lo tanto, si igualamos la segunda componente obtenemos que $a_2 = \phi(a_1)(a_2)$. Luego $\phi(a_1) = id$, para cualquier $a_1 \in G_1$.

3.- **Problema 3:**
Encuentre todos los grupos de orden 21 salvo isomorfía, escritos como producto directo y semidirecto de grupos cíclicos.

Desarrollo: Por lo demostrado en las ayudantías previas, sabemos que existen dos grupos de orden 21 salvo isomorfía. Estos son $G = C_{21}$ y $G = \langle a, b : a^3 = b^7 = 1, aba^{-1} = b^2\rangle$. Si $G \cong C_{21}$, entonces el problema queda solucionado. Si $G = \langle a, b : a^3 = b^7 = 1, aba^{-1} = b^2\rangle$, entonces por lo destrado en las ayudantiás previas, existe un 7-Sylow $S \lhd G$. Además existe un 3-Sylow T, tal que $G = |T||S|$ y $T \cap S = \{1\}$. Luego por lo visto en el lema 1, tenemos que $G \cong T \rtimes_\phi S$, para $\phi(s)(t) = tst^{-1}$, para cualquier $t \in T$, $s \in S$. Luego $G \cong C_3 \rtimes_\phi C_7$, para $\phi(b)(a) = aba^{-1} = b^2$, donde $C_3 \cong \langle a\rangle$ y $C_7 = \langle b\rangle$.

3.- **Ejercicio:** Pruebe que $C_3 \ltimes_\phi C_2$ es soluble, para cierto ϕ homomorfismo.

4.- **Problema 4:**
Demuestre que para cualquier homomorfismo $\phi : C_{13} \to Aut(C_3)$, se tiene que $C_{13} \ltimes_\phi C_3$ es soluble.

Demostración: Una forma de atacar este problema es notar que problema es notando que $|C_{13} \ltimes_\phi C_3| = |C_{13}||C_3| = 39$. Luego por lo visto en las ayudantías previas tenemos dos casos.
Primero si $G \cong C_{39}$, entonces G es abeliano. Por lo tanto soluble.
Por otro lado, si $G = \langle a, b : a^3 = b^{13} = 1, aba^{-1} = b^2\rangle$, entonces por lo destrado en las ayudantiás previas, existe un 13-Sylow $S \lhd G$. Entonces $|G/S| = 3$ y $S \cong C_{13}$. Luego $G/S \cong C_3$. Por lo tanto la cadena $\{1\} \lhd S \lhd G$ convierte a G en un grupo soluble.

Ayudantía 11: En esta ayudantía estudiaremos un tipo especial de grupos, llamados grupos nilpotentes.

1.- **Problema 1:**
Pruebe que $G^i/G^{i+1} \subseteq Z(G/G^{i+1})$, para cualquier $i \in \mathbb{N}$.

Demostración: Recordemos que $G^{i+1} = [G^i, G] \subset G^i$, con $G^0 = G$. Entonces $G^i/G^{i+1} \subset G/G^{i+1}$. Observe que $G^{i+1} \triangleleft G$ pues $x(g_i g g_i^{-1} g^{-1})x^{-1} = (xg_i x^{-1})(xgx^{-1})(xg_1 x^{-1})^{-1}(xgx^{-1})^{-1}$, para $g_i \in G^{i+1}$ y $g \in G$. Concluimos por inducción. Tomamos $\overline{x} \in G^i/G^{i+1}$ y $\overline{z} \in G/G^{i+1}$. Debemos probar que $\overline{xzx^{-1}z^{-1}} = \overline{1}$, es decir $xzx^{-1}z^{-1} \in G^{i+1}$. Esto se cumple por la definición de G^{i+1}. Esto además prueba que $G^i/G^{i+1} = Z(G/G^{i+1})$.

2.- **Problema 2:**
Demuestre que $G = S_3$ no es nilpotente. Concluya que existen grupos solubles no nilpotentes.

Demostración: Observe que $G^0 = S_3$ y $G^1 = [S_3, G_3] \triangleleft G_3$, pero siempre se cumple que $(12)(13)(12)(13) = (213) \in G^1$. Por lo tanto $G^1 = A_3$ o $G^1 = S_3$. Observe que si $x \in A_3$ entonces $(yxy^{-1})x^{-1} \in A_3$, por la normalidad de A_3 en S_3. Por otro lado si $x, y \in S_3 - A_3$ entonces $yxy^{-1}x^{-1} \in A_3$, esto se puede probar en todos lo casos. Luego $G^1 = A_3$. Ahora bien $[S_3, A_3] \subseteq A_3$ pero $(123)(12)(132)(12) = (321) \in [G_3, A_3]$. Por lo tanto $A_3 = [S_3, A_3]$. Luego $G^n = G^1 = A_3$, para todo $n \geq 1$. Luego S_3 no es soluble. Esto demuestra que hay grupos solubles no nilpotentes.

3.- **Problema 3:**
Sea G grupo y H subgrupo cualquiera de G.
i.- Si G es nilpotente, pruebe que H es nilpotente.
ii.- Pruebe que S_n no es nilpotente para $n \geq 3$.

Desarrollo:
i.- Demostremos por inducción que $H^i \subseteq G^i$, para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Observe que para $i = 0$ es cierto pues $H \subseteq G$. Supongamos que $H^i \subseteq G^i$ para cierto $i \in \mathbb{N}$. Entonces $H^{i+1} = [H, H^i] \subseteq [G, G^i] = G^{i+1}$. Esto concluye lo deseado. Luego si $G^n = \{1\}$, para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces $H^n = \{1\}$. Por ello H es nilpotente.

ii.- Si S_n fuera nilpotente para $n \geq 3$, entonces $S_3 \subseteq S_n$ es nilpotente. Esto es contradictorio. Por lo tanto S_n no es nilpotente para $n \geq 3$.

4.- **Problema 4:**
Encuentre los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $G = D_{2n}$ es nilpotente.

Demostración: Recordemos que $G_{2n} = \langle x, y : x^n = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$. Analicemos G^1. Observe que $[x^i, y] = x^i(yx^{-i}y^{-1}) = x^i(x^{-1})^i = x^{2i}$ y $[y, x^i] = (yx^i y^{-1})x^{-i} = x^{-2i}$. Por lo tanto $G^1 = (x^2)$. Probemos por inducción que $G^i = (x^{2^i})$. Para $n = 1$ ya fue probado. Supongamoslo cierto para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $[G^n, G]$ está generado por $[x^{2^n i}, x] = 1$, $[x^{2^n i}, y] = x^{2^{n+1} i}$ y $[y, x^{2^n i}] = x^{2^{n+1} i}$. Esto se debe a los cálculos ya hechos. Luego $G^i = (x^{2^i})$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Si

$G^i = \{1\}$, para cierto $i \in \mathbb{N}$, entonces $n|2^i$. Por lo tanto $n = 2^j$, para cierto $j \in \mathbb{N}$.

4.- **Ejercicio:** Demuestre que D_8, D_{16} son grupos nilpotentes usando serie de conmutadores y serie central.

5.- **Ejercicio:** Pruebe, usando serie central, que todo grupo de orden p^3 es nilpotente.