

CÁLCULO I (PRIMAVERA 2015)

GUÍA IV

1. LÍMITES DE SUCESIONES

1.- Usando la propiedad arquimediana, demuestre los siguientes límites:

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.
- iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{n}} = 0$.
- iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.
- v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(1/n) = 0$. (*ayuda:* puede usar la desigualdad $|\sin(u)| \leq |u|$ para todo $u \in \mathbb{R}$).
- vi) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^4}$.

2.- Calcule los siguientes límites

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3-1}{3n^3+n-4}$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cos(n)}{n^2+24}$.
- iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+\sin(n\pi/2)}{2n+1}$.
- v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^3}{2n^2-1} - \frac{n^2}{2n+1} \right)$.
- vi) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k$ (con $|x| < 1$).
- vii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$.
- viii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11}$.
- ix) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$.
- x) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2+n-2}{4^2+2n+7} \right)^3$.
- xi) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \cos(n^3) - \frac{3n}{6n+1}$.
- xii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4} \right)^4$.

3.- Usando el hecho que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$, calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 1}{2^n - 1}.$$

Ayuda: multiplique y divida por 2^n :)

4.- Calcule el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1} \right).$$

1

Nota: Este límite es muy interesante, debido a que cada término (por separado) no tiene límite. Sin embargo, al sumar ambas fracciones aparece una expresión más tratable.

- 5.- Usando el teorema del sandwich, calcule el límite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!},$$

donde $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 321$. *Ayuda:* Use la desigualdad $n \leq n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, calcule los límites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n!)}{n!}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

- 6.- Usando el teorema del sandwich, calcule el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2(n+2) \sin(n^3)}{n^{33}}.$$

- 7.- Usando el teorema del sandwich, calcule el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sin(1/n^2)|.$$

Ayuda: puede suponer conocida la desigualdad $|\sin(x)| \leq |x|$ (la demostraremos más adelante).

- 8.- Sea $|r| < 1$. Usando el teorema del sandwich, calcule el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sin(nr^n)|.$$

- 9.- Calcule el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^n + 3^n)^{1/n}}{3 + n(1/2)^n}.$$

- 10.- Sean $\{a_n\}_n$ una sucesión con la propiedad siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |L|.$$

Ayuda: Recuerde que una consecuencia de la desigualdad triangular dice que

$$||u| - |v|| \leq |u - v|,$$

utilice esta desigualdad junto con la definición de Cauchy.

- 11.- Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera y construya la sucesión

$$a_n = \frac{|x_n|}{n + n|x_n|}$$

y demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Ayuda: Demuestre que

$$\frac{|x_n|}{1 + |x_n|} \leq 1.$$

12.- Demuestre que la sucesión

$$x_n = \frac{2n-1}{3n+1}$$

es creciente.

13.- Considere la sucesión a_n cuyo n -ésimo término es el n -ésimo término de la representación decimal del número $12/7$. Demuestre que tiene una sub-sucesión convergente.

14.- Demuestre que si la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente y acotada inferiormente, entonces tiene límite.

15.- Usando los resultados vistos en clases, calcule los límites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^5}.$$

16.- Calcule el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{6n+3}.$$

Ayuda: note que si $n \geq 3$, se tiene que

$$\sqrt[n]{6n} \leq \sqrt[n]{6n+3} \leq \sqrt[n]{7n}.$$

E-mail address: grobledo@uchile.cl