

CÁLCULO I (PRIMAVERA 2015)

GUÍA III

- 1.- Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos. Definamos el conjunto $A+B$ como sigue:

$$A+B = \left\{ x+y \in \mathbb{R} : x \in A \text{ y } y \in B \right\}.$$

Demuestre que si A y B son acotados superiormente, entonces $A+B$ es acotado superiormente. Demuestre que

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

- 2.- Sean $A \subset]0, +\infty[$ y $B \subseteq]0, +\infty[$ dos conjuntos no vacíos. Definamos el conjunto $A \cdot B$ como sigue:

$$A \cdot B = \left\{ xy \in \mathbb{R} : x \in A \text{ y } y \in B \right\}.$$

Demuestre que si A y B son acotados superiormente, entonces $A \cdot B$ es acotado superiormente. Demuestre que

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

- 3.- Considere el conjunto

$$S = \left\{ 1 - \frac{1}{n^{25}} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demuestre que $\sup(S) = 1$.

- 4.- Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $z \in]x - \frac{1}{n}, x[$. (Este ejercicio nos dice que **todo número real puede ser aproximado por números racionales con la precisión que se desee**).
- 5.- Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos. Demuestre que si A y B son acotados superiormente, entonces $A \cup B$ tiene supremo.
- 6.- Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos. Si A y B son acotados superiormente, Podemos decir siempre que $A \cap B$ tiene supremo?.
- 7.- Sean $S \subseteq \mathbb{R}$ y $T \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos. Si S es acotado superiormente, T es acotado inferiormente y se verifica que

$$x < y \text{ para todo } x \in S \text{ y para todo } y \in T.$$

Demuestre que $\sup(S) \leq \inf(T)$.

- 8.- Sean $S \subset T \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos. Demuestre que si T es acotado superiormente entonces S es acotado superiormente. Demuestre que

$$\sup(S) \leq \sup(T).$$

- 9.- Se dice que $S \subset \mathbb{R}$ es **denso** en $\mathbb{R}$ si para todo par de números reales x y y con $x < y$ existe $s \in S$ tal que $s \in]x, y[$ ¹.

¹Ya sabemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Sin embargo, tenemos que enfatizar que hay otros conjuntos que son densos en los reales

Demuestre que S es denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \varepsilon > 0 \text{ se tiene que }]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap S \neq \emptyset$$

- 10.- Usando el ejercicio anterior, demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $\{s_n\}_n$ tal que

$$s_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = x.$$

- 11.- Demuestre que si U es denso en $\mathbb{R}$ entonces

$$U \cap]-\infty, 0[\neq \emptyset \quad \text{y} \quad U \cap]0, +\infty[\neq \emptyset$$

- 12.- Sea $S \subset \mathbb{R}$. Definamos el conjunto:

$$S^c = \mathbb{R} \setminus S = \{x \in \mathbb{R} : x \notin S\}.$$

Demuestre que si S es denso en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \setminus S$ no es denso en $\mathbb{R}$.

E-mail address: grobledo@uchile.cl