EL CONJUNTO $\mathbb{N}$

MC 130–1

1. El conjunto $\mathbb{N}$

Definición 1. *Diremos que $\mathcal{I}$ es el conjunto conformado por todos los subconjuntos $M \subseteq \mathbb{R}$ que verifican las siguientes propiedades:*

i) $1 \in M$,
ii) *Si* $x \in M$, *entonces* $x + 1 \in M$.

Es importante notar que el subconjunto $\mathbb{R}^+ \in \mathcal{I}$. En efecto, como $0 < 1$, sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$. Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}^+$ el axioma de orden **(O2)** implica que $1 + x \in \mathbb{R}^+$.

Definición 2. *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por la intersección de todos los subconjuntos $M \in \mathcal{I}$:*

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \in \mathcal{I}} M.$$

Es decir, se tiene que

$$x \in \mathbb{N} \iff x \in M \quad \forall M \in \mathcal{I} \tag{1.1}$$

Observación 1. Notemos que esto tiene las siguientes consecuencias:

(a) $1 \in \mathbb{N}$, porque $1 \in M$ para todo $M \in \mathcal{I}$.
(b) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$.
(c) Entonces: $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $4 = 3 + 1, \ldots$ tambien son elementos de $\mathbb{N}$.
(d) Si $M \in \mathcal{I}$, entonces $\mathbb{N} \subseteq M$.

Justificaremos en más detalle la afirmación b):

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} &\Rightarrow n \in M \quad \forall M \in \mathcal{I} \quad \text{Aqui usamos la primera implicación de (1.1)} \\ &\Rightarrow n + 1 \in M \quad \forall M \in \mathcal{I} \quad \text{Aqui usamos la segunda propoedad de los conjuntos } M \in \mathcal{I} \\ &\Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \quad \text{Aqui usamos la implicancia "inversa"de (1.1)} \end{aligned}$$

Teorema 1 (Principio de inducción completa)**.** *Sea $P(n)$ una proposición que depende de una variable $n \in \mathbb{N}$. Si se tiene que*

i) $P(1)$ *es verdadera,*
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ *es verdadera* $\Rightarrow P(n + 1)$ *es verdadera.*

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Definamos el conjunto

$$M = \Big\{ n \in \mathbb{R} \colon n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad P(n) \text{ es verdadera} \Big\}.$$

Notemos que si verificamos $M = \mathbb{N}$, estaremos diciendo que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos que demostrar las inclusiones $M \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \subseteq M$[1].

[1]Recordemos que los conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

En primer lugar demostraremos la contención $M \subseteq \mathbb{N}$. En efecto, consideremos un elemento cualquiera $k \in M$, notemos que por la definición del conjunto M, se tiene que $k \in \mathbb{N}$.

En segundo lugar, demostraremos la contención $\mathbb{N} \subseteq M$. La demostración es menos directa y requiere notar que $M \in \mathcal{I}$: En efecto, notemos que $i)$ implica que $1 \in M$. Por otro lado, sea $n \in M$, entonces $P(n)$ es verdadera y ii) implica que $P(n+1)$ es verdadera, por lo tanto $n+1 \in M$.

Como $M \in \mathcal{I}$, se tiene (usando la propiedad (d) de la Observación 1) que $\mathbb{N} \subseteq M$, lo cual implica que $M = \mathbb{N}$ y concluye la demostración. $\square$

Lemma 1. $1 \in \mathbb{N}$ *es el número natural más pequeño.*

Demostración. Definamos la proposición

$$P(n) = n \geq 1$$

y demostraemos que es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ mediante inducción.

Notemos que $P(1) = 1 \geq 1$ es verdadera. Ahora, supongamos que $P(n)$ es cierta, es decir $n \geq 1$. Usando consecuencias de los axiomas de orden sabemos que $n+1 \geq 1$ y por lo tanto $P(n+1)$ es cierta.

En consecuencia, el principio de inducción dice que $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir $n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Los siguientes dos resultados se pueden demostrar mediante inducción, los detalles se dejan al lector:

Lemma 2. *El conjunto* $\mathbb{N}$ *es cerrado bajo adición. Es decir, si* $m \in \mathbb{N}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $m + n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3. *El conjunto* $\mathbb{N}$ *es cerrado bajo multiplicación. Es decir, si* $m \in \mathbb{N}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Lemma 4. *El conjunto* $\mathbb{N}$ *es cerrado bajo sustracción de un número menor a uno mayor.*

Demostración. Utilizaremos inducción, lo primero es construir la proposición:

$$P(n) = \text{para todo } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ con la propiedad } \quad m < n \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$$

y demostrar que es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Notemos que

$$P(2) = \text{para todo } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ con la propiedad } \quad m < 2 \Rightarrow 2 - m \in \mathbb{N}$$

$\square$

es verdadera, pues $m < 2$ y $m \in \mathbb{N}$ implica $m = 1$. Por otro lado, $2 - 1 = 1 \in \mathbb{N}$.

Ahora, supongamos que la proposición

$$P(k) = \text{para todo } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ con la propiedad } \quad m < k \Rightarrow k - m \in \mathbb{N}$$

es verdadera. Tenemos que demostrar que la proposición $P(k+1)$ es verdadera. es decir, si $m < k+1$, entonces $m - (k+1) \in \mathbb{N}$.

Notemos que el Lema 2 implica:

$$k + 1 - m = \underbrace{k - m}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$$

y el principio de inducción completa implica que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Lemma 5. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces no existe ningún número natural k con la propiedad $n < k < n+1$.*

Demostración. Supongamos que si existe un número natural k con dicha propiedad, entonces el Lema 4 implica que $k - n \in \mathbb{N}$ y satisface la desigualdad $0 < k - n < 1$. Sin embargo, esto es una contradicción con el Lema 1.

$\square$

Teorema 2 (Principio del buen orden)**.** *Todo subcojunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.*

Demostración. La demostración se hará por contradicción: supongamos la existencia de un subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ sin elemento mínimo.

Además, denotemos el conjunto:

$$T = \Big\{ n \in \mathbb{N} \colon n \notin A \Big\}.$$

Una forma de demostrar el Teorema es verificar que $A = \emptyset$, lo cual equivale a $T = \mathbb{N}$. Por definición, ya sabemos que $T \subset \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos que demostrar que $\mathbb{N} \subset T$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos

$$I_n = \Big\{ k \in \mathbb{N} \colon k \leq n \Big\}$$

y consideremos la proposición:

$$P(n) = I_n \subset T.$$

Veremos mediante inducción que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$: En primer lugar veremos que $P(1) = I_1 = \{1\} \subset T$ es verdadera. En efecto, si no fuese verdadera, se tendría que $1 \in A$ y por lo tanto, A tendría elemento mínimo, lo cual es imposible pues contradice nuestra hipótesis inicial sobre el conjunto A.

Ahora, supongamos que $P(n)$ es cierta, esto implica que

$$I_n = \Big\{ k \in \mathbb{N} \colon k \leq n \Big\} \subset \Big\{ n \in \mathbb{N} \colon n \notin A \Big\} = T$$

y por lo tanto A no contiene ningún elemento menor o igual que n. Por otro lado, A no puede contener a $n+1$ pues sería su elemento mínimo. Esto implica que $n+1 \in T$ y por lo tanto, $P(n+1)$ es verdadera.

El principio de inducción implica que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $I_n \subset T$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El estudiante podrá verificar sin dificultad que el conjunto $T \subset \mathcal{I}$. Finalmente, usando la afirmación (d) de la Observación 1, se concluye que $\mathbb{N} \subset T$, lo cual implica $T = \mathbb{N}$ y $S = \emptyset$.

$\square$

El conjunto de los números naturales permitirá presentar el siguiente resultado (que enunciamos sin demostración):

Teorema 3 (Propiedad de ordenación arquimediana)**.** *Dado cualquier número $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.*

1.1. Bibliografía. Estas lineas resumen (apresuradamente) ideas contenidas en los siguientes textos:

1.- Eric Goles. *Algebra.* Editorial Dolmen, Santiago, 1994. (Capítulo II)
2.- Jospeh Kitchen **Cálculo**. Editorial Mc Graw–Hill, México, 1986. (Páginas 46–54)
3.- Hector Merklen. *Introducción a la Teoría de los Números Naturales y Reales.* Ediciones universitarias de Valparaíso, Valparaíso, 1972. (Páginas 110–116).

2. Otros subconjuntos de $\mathbb{R}$

Una consecuencia directa del Lema 1 es que dado $n \in \mathbb{N}$, tanto su inverso aditivo $-n \notin \mathbb{N}$ como su inverso multplicativo $n^{-1} \notin \mathbb{N}$. De igual forma $0 \notin \mathbb{N}$ en el contexto de nuestra definición del conjunto $\mathcal{I}$.

El conjunto conformado por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero, se denotará por $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \Big\{ \pm n \colon n \in \mathbb{N} \Big\} \cup \{0\}$$

y se conoce como el conjunto de los números enteros.

Usando los Lemas 1–5, el estudiante podra demostrar que

Lemma 6. *El conjunto $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo adición y multiplicación.*

El conjunto conformado por los números enteros, sus inversos multiplicativos y el cero, se denotará por $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \big\{ \frac{n}{m} \colon n \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \big\}.$$

Lemma 7. *El conjunto $\mathbb{Q}$ es cerrado bajo adición y multiplicación.*

Demostración. Sean $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Es decir, $n \in \mathbb{Z}$,$p \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Usando el Teorema 5 del apunte anterior (dedicado a los axiomas de Cuerpo y Axiomas de Orden) sabemos que

$$\frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{n \cdot q + m \cdot p}{m \cdot q}.$$

Tenemos que verificar que la expresión de la derecha es un número racional (es decir, tenemos que verificar que el "numerador"pertenece a $\mathbb{Z}$ y el "denominador"pertence a $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$). En efecto, Por Lema 6, sabemos que $n \cdot q \in \mathbb{Z}$, $m \cdot p \in \mathbb{Z}$ y $n \cdot q + m \cdot p$. De igual forma, el Lema 6 implica que $m \cdot q \in \mathbb{Z}$. Finalmente, debemos demostrar que $m \cdot q \neq 0$ y se deja como ejercicio al lector.

La demostración de que la multiplicacón de dos números racionales es un número racional se deja al lector. □

Lemma 8. *El conjunto $\mathbb{Q}$ satisface los axiomas de cuerpo.*

E-mail address: `grobledo@uchile.cl`