Solución numérica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

Rodrigo Andrés Contreras Martínez

22 de diciembre de 2015

Se tiene la siguiente ecuación diferencia:

$$\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & f(t,x(t)) \quad \forall t \in [t_0,\infty[\\ \dot{x}(t_0) & = & v_0 \in \mathbb{R} \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R} \end{array} \tag{1}$$

con $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función escalar clase C^∞de dos variables. Se quiere encontrar una función $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ solución para la ecuación (1).

Como f es de clase C^∞, entonces x debe serlo también, por lo que observaremos la expansión de Taylor de una posible solución:

$$\begin{array}{rcl} x(t+\Delta t) & = & x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{x}(t) + O(\Delta t^3) \\ \dot{x}(t+\Delta t) & = & \dot{x}(t) + \Delta t \ddot{x}(t) + O(\Delta t^2) \end{array}$$

Pero $\ddot{x}(t) = f(t,x(t))$, entonces definimos la siguiente sucesión:

$$\left(\begin{array}{l} x_{n+1} \\ v_{n+1} \\ t_{n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} x_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 f(t_n,x_n) \\ v_n + \Delta t f(t_n,x_n) \\ t_n + \Delta t \end{array} \right) \tag{2}$$

con Δt algún real positivo y los valores iniciales de la sucesión están dados por los valores iniciales t_0, x_0 y v_0 de la ecuación diferencial inicial. Aunque para efectos de este documento consideraremos $t_0 = 0$ pues es cosa de hacer un cambio de variable que no afecta la ecuación diferencial de forma importante.

Sea la función $x_{\Delta t} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que:

$$x_{\Delta t}(t) = x_n + (t-t_n)v_n + \frac{1}{2}(t-t_n)^2 f(t_n,x_n) \forall t \in [t_n,t_{n+1}[\tag{3}$$

La función descrita en (3) es continua en todo $\mathbb{R}^+$ y clase C^∞ por intervalos. Además se observa que:

$$\begin{array}{rcll} \dot{x}_{\Delta t}(t) & = & v_n + (t-t_n)f(t_n,x_n) & \forall t \in [t_n,t_{n+1}[\\ \ddot{x}_{\Delta t}(t) & = & f(t_n,x_n) & \forall t \in [t_n,t_{n+1}[\end{array} \tag{4}$$

De (3) y (4) podemos afirmar que:

$$\begin{array}{rcl} x_{\Delta t}(0) & = & x_0 \\ \dot{x}_{\Delta t}(0) & = & v_0 \\ \ddot{x}_{\Delta t}(t_n) & = & f(t_n, x_{\Delta t}(t_n)) \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Esto se cumple para todo Δt, por lo tengo podemos tomar una sucesión de Δt que converja a 0 y eso nos definirá una sucesión de funciones que convergerá a la solución de la ecuación diferencial inicial.[1]

[1] La demostración de la convergencia de esta sucesión de funciones resulta inabarcable en este documento, por lo que tendrán que creerme que así es. Pero confíen, así es :)

Y, ¿qué obtuvimos de todo esto?. Bueno, obtuvimos MUCHO, obtuvimos que con un Δt suficientemente pequeño, podemos asegurar que la función asociada a él, es una aproximación a la ecuación diferencial que teníamos inicialmente. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones diferenciales es aquella que describe el movimiento en caída libre de un objeto. En donde la función f está dada como un valor constante, es decir, $f(t,x) = -9{,}8 \forall t, x \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, una forma de obtener su solución numérica es iterando el siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_n - \frac{1}{2}\Delta t 9{,}8 \\ v_{n+1} &= v_n - 9{,}8\Delta t \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t \end{aligned}$$

Algoritmo ya obtenido en (2). Con x_0 y v_0 la altura y velocidad inicial entregadas en el ejercicio. Ahora bien, el problema es que para esta situación tenemos una solución analítica bien conocida, que es $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ y por lo tanto la solución numérica no es más que un juguete relegado a los momentos de aburrimiento extremo del usuario.

Pero es en las situaciones más oscuras donde esta herramienta adquiere una utilidad invaluable. En ocasiones, como bien es sabido, no se pueden encontrar soluciones analíticas a pesar de saber que la solución sí existe y es única (mantra obligatorio de aquellos matemáticos budistas). Pero como ya se demostró en la página anterior.

Una de estas situaciones oscuras de las que les comento es, por ejemplo, el tradicional Problema de 3 Cuerpos planteado hace ya varios años. En este problema se tienen 3 cuerpos(claramente) sometidos a atracción gravitacional entre ellos. En la inmensa mayoría de los casos este problema no tiene solución analítica, pero dada esta herramienta, se puede hallar una solución que muestre la trayectoria de dichos cuerpos en función del tiempo.

Junto a este problema se encuentran muchos otros, por lo que la solución numérica de muchas ecuaciones diferenciales resulta de un imperante en la investigación hoy en día, dado que, por desgracia, el algoritmo presentado en este trabajo es muy inexacto.