Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Mecánica II
Ciencias Exactas

Profesor	:	Eduardo Menéndez
Ayudantes	:	Patricio Figueroa
		Carolina Gálvez
		Gabriel Paredes

Guía N$^\circ$ 6. Ondas mecánicas.

Viernes 24 de octubre de 2014

---

1. Un pescador nota que su bote sube y baja periódicamente a causa de las olas en la superficie del agua. El bote tarda $2{,}5$ s en moverse del punto más alto al más bajo, una distancia total de $0{,}62$ m. El pescador ve que la distancia entre crestas es de $6{,}0$ m. a) ¿Con qué rapidez viajan las olas? b) ¿Qué amplitud tiene una ola? c) Si la distancia vertical total recorrida por el bote fuera de $0{,}30$ m, con todos los demás datos iguales, ¿cómo cambiarían sus respuestas a las partes (a) y (b)? d) ¿Cabe esperar que el movimiento del bote sea sólo vertical? ¿Por qué sí o por qué no?

2. **Longitudes de onda audibles.** Si la amplitud es suficientemente alta, el oído humano puede responder a ondas longitudinales en una gama de frecuencias de $20{,}04$ Hz a 20000 Hz aproximadamente. Calcule las longitudes de onda correspondientes a estas frecuencias para ondas en a) aire ($\nu = 344$ m/s); b) agua ($\nu = 1480$ m/s).

3. La ecuación de cierta onda transversal es:

$$y(x,t) = (6{,}50mm)\cos\left[(2\pi)\left(\frac{x}{28{,}0cm} - \frac{t}{0{,}0360s}\right)\right]$$

   Determine la a) amplitud, b) longitud de onda, c) frecuencia, d)rapidez de propagación, e) dirección de propagación de la onda.

4. Demuestre que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \text{a)}\ y(x,t) &= A\cos(kx+\omega t) \\ \text{b)}\ y(x,t) &= A\sin(kx+\omega t) \end{aligned}$$

   c)¿En qué direcciones viajan estas ondas?¿Cómo lo sabe? d) Para la onda de la parte b), escriba las ecuaciones para la rapidez y la aceleración transversales de una partícula en el punto x.

5. a) Para una onda descrita por $y(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$, grafique y, v_y y a_y en función de x para $t = 0$. b) Considere los siguientes puntos de la cuerda:(i) $x = 0$, (ii) $x = \pi/4k$, (iii) $x = \pi/2k$, (iv) $x = 3\pi/4k$, (v) $x = \pi/k$, (vi) $x = 5\pi/4k$, (vii) $x = 3\pi/2k$, (viii) $x = 7\pi/4k$. Para una partícula en cada uno de estos puntos en $t = 0$, indique con palabras si la partícula se está moviendo, y en qué dirección, y si se está acelerando, frenando, o tiene aceleración instantánea cero.

6. Una onda senoidal se propaga por una cuerda estirada en el eje x. El desplazamiento de la cuerda en función del tiempo se muestra en la figura 1, para partículas en $x = 0$ y en $x = 0{,}0900$ m. a) Calcule la amplitud de la onda. b) Calcule el periodo de la onda. c) Se sabe que los puntos en $x = 0$ y $x = 0{,}0900$ m están separados una longitud de onda. Si la onda se mueve en la dirección $+x$, determine λ y la rapidez de la onda. d) Repita (c) si la onda ahora se mueve en la dirección $-x$. e) ¿Sería posible determinar en forma definitiva la longitud de onda de las partes (c) y (d) si no supiéramos que los dos puntos están separados una longitud de onda? ¿Por qué sí o por qué no?.

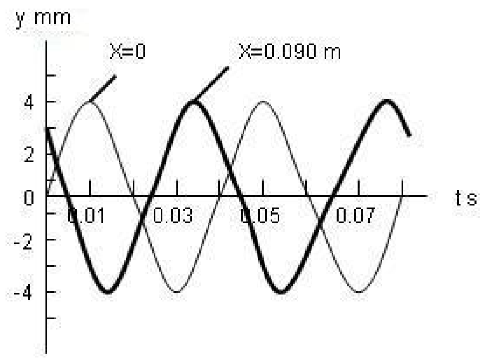

Figura 1: Desplazamiento de una cuerda para dos posiciones x distintas.

7. **Rapidez de propagación versus rapidez de partículas.** Demuestre que la ecuación:

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A\cos\left[2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)\right]$$

puede escribirse como:

$$y(x,t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

b) Use $y(x,t)$ para obtener una expresión para la velocidad transversal v_y de una partícula de la cuerda en la que viaja la onda. c) Calcule la rapidez máxima de una partícula de la cuerda. ¿En qué circunstancias es igual a la rapidez de propagación v? ¿Menor que v? ¿Mayor que v?

8. ¿Con qué tensión debe estirarse una cuerda de $2{,}50$ m de longitud y masa de $0{,}120$ kg para que ondas transversales con $f = 40{,}0$ Hz tengan una longitud de onda de $0{,}750$ m?

9. Un oscilador armónico simple en el punto $x = 0$ genera una onda en una cuerda. El oscilador opera con una frecuencia de $40{,}0$ Hz y una amplitud de $3{,}00$ cm. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de $50{,}0$ g/m y se le estira con una tensión de $5{,}00$ N. a) Determine la rapidez de la onda. b) Calcule la longitud de la onda. c) Describa la función $y(x,t)$ de la onda. Suponga que el oscilador tiene su desplazamiento máximo hacia arriba en el instante $t = 0$. d) Calcule la aceleración transversal máxima de las partículas de la cuerda. e) Para este capítulo hemos hecho caso omiso de la fuerza de gravedad, ¿esa aproximación es razonable en el caso de esta onda? Explique.

10. Un alambre de piano con masa de $3{,}00$ g y longitud de $80{,}0$ cm se estira con una tensión de $25{,}0$ N. Una onda con una frecuencia de 120 Hz y amplitud de $1{,}60$ mm viaja por el alambre. a) Calcule la potencia media que transporta esta onda. b) ¿Qué sucede con la potencia media si se reduce a la mitad la amplitud de la onda?

11. **Umbral del dolor.** Imagine que investiga un informe del aterrizaje de un OVNI en una región despoblada de Nuevo México y encuentra un objeto extraño que radia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. Suponga que el sonido proviene de una fuente puntual y que puede despreciar las reflexiones. Está caminando lentamente hacia la fuente. Cuando está a $7{,}5$ m de ella, determina que la intensidad es de $0{,}11$ W/m^2. Comúnmente se considera que una intensidad de $1{,}0$ W/m^2 es el "umbral del dolor". ¿Cuánto más podrá acercarse a la fuente antes de que la intensidad del sonido alcance ese umbral?

12. La ecuación de una onda transversal que viaja por una cuerda es

$$y(x,t) = (0{,}750cm)\cos\pi[(0{,}400cm^{-1})x + (250s^{-1})t]$$

a) Calcule la amplitud, la longitud de onda, frecuencia, periodo y rapidez de propagación. b) Dibuje la forma de la cuerda en los siguientes valores de t: 0; $0{,}0005$ s y $0{,}0010$ s. c)¿La onda viaja en la dirección $+x$ o $-x$? d) La masa por unidad de longitud de la cuerda es de $0{,}0500$ kg/m. Calcule la tensión. e) Calcule la potencia media de esta onda.

13. **Onda no senoidal.** En la figura 2, se muestra la forma de una onda en una cuerda en un instante específico. La onda se propaga a la derecha, en la dirección $+x$. a) Determine la dirección de la velocidad transversal de cada uno de los 6 puntos numerados en la cuerda. Si la velocidad es cero, indíquelo. Explique su razonamiento. b) Determine la dirección de la aceleración transversal de cada uno de los 6 puntos numerados en la cuerda. Explique su razonamiento. c) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si la onda se propagara hacia la izquierda, en la dirección $-x$?

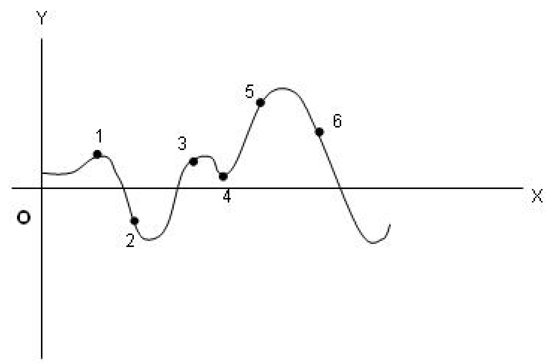

Figura 2: Onda senoidal para un instante fijo.

14. **Interferencia de puntos triangulares**. Dos pulsos ondulatorios triangulares viajan uno hacia el otro por una cuerda estirada como se muestra en la figura 3. Los pulsos son idénticos y viajan a $2{,}00$ cm/s. Los bordes delanteros de los pulsos están separados $1{,}00$ cm en $t = 0$. Dibuje la forma de la cuerda en $t = 0{,}250$ s, $t = 0{,}500$ s, $t = 0{,}750$ s, $t = 1{,}000$ s y $t = 1{,}250$ s.

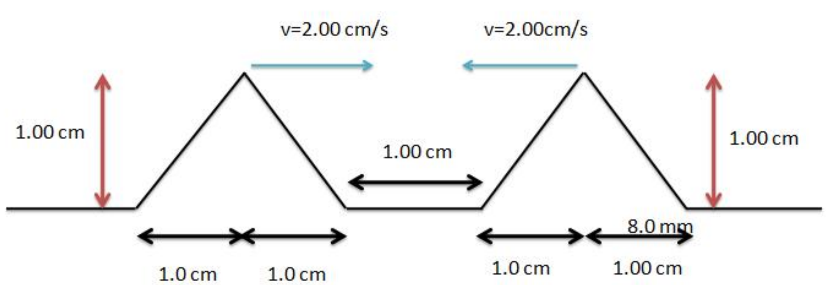

Figura 3: figura ejercicio 2.

15. **Ecuación de ondas y ondas estacionarias**. a) Demuestre por sustitución directa que $y(x,t) = [A_{OE}\sin(kx)]\sin(\omega t)$ es una solución de la ecuación de onda para $v = \omega/k$. b) Explique por qué la relación $v = \omega/k$ para ondas **viajeras** también es válida para ondas **estacionarias**.

16. Sean $y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$ y $y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$ dos soluciones de la ecuación de onda para la misma v. Demuestre que $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ también es una solución de la ecuación de onda.

17. **Ondas en un palo**. Un palo flexible de $2{,}0$ m de longitud no está fijo en ningún punto y puede vibrar. Dibuje claramente este palo vibrando en sus primeros 3 armónicos y luego use sus dibujos para calcular la longitud de onda de cada uno de esos armónicos.

18. La función de onda de una onda estacionaria es $y(x,t) = 4{,}44$ mm $\sin((32{,}5$ rad/s$)t)$. Para las dos ondas viajeras que

forman esta onda estacionaria, determine a) la amplitud, b) la longitud de onda, c) la frecuencia, d) la rapidez, e) las funciones de onda. f) ¿Puede con la información dada determinar de qué armónico se trata? Explique.

19. **Ondas de forma arbitraria**. a) Explique por qué cualquier onda descrita por una función de la forma $y(x,t) = f(x-vt)$ se mueve en la dirección $+x$ con rapidez v. b) Demuestre que $y(x,t) = f(x-vt)$ satisface la ecuación de onda, sea cual sea la forma funcional de f. Para hacerlo, escriba $y(x,t) = f(u)$, donde $u = x - vt$. Luego, para derivar parcialmente $y(x,t)$, use la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}(-v)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}$$

c) Una pulsación de onda está descrcita por $y(x,t) = De^{-(Bx-Ct)^2}$, donde B, C y D son constantes positivas. Calcule la rapidez de esta onda.

20. Una cuerda uniforme con longitud L y masa m se sujeta por un extremo y se gira en un círculo horizontal con velocidad angular ω. Desprecie el efecto de la gravedad sobre la cuerda. Calcule el tiempo que una onda transversal tarda en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

21. Supongamos que la siguiente función describe una onda viajera en un cuerda tensa.

$$y(x,t) = 0{,}350 \sin(31{,}4t - 9{,}42x + 0{,}79) \quad \text{(Todo en unidades del SI)}$$

a) Demuestre, calculando las derivadas parciales necesarias, que esta función satisface la ecuación de onda.
b) Determine la rapidez, la dirección de recorrido de la onda, la longitud de onda y la frecuencia de la onda. No olvide escribir las unidades.
c) Si la cuerda tiene una masa de 10 kg y un largo de 100 m , ¿cuál es su tensión?

22. Un bloque de masa M cuelga de una cuerda de caucho. El bloque se suspende de modo que la cuerda no se estira. La longitud no estirada de la cuerda es L_0 y su masa es m, mucho menor que M. La constante elástica de la cuerda es k. El bloque se libera y se detiene instantáneamente en el punto más bajo.
a) Determine la tensión de la cuerda en el punto más bajo.
b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en la posición estirada?
c) Encuentre la rapidez de la onda transversal si el bloque se mantiene en la posición más baja.
d) Encuentre la velocidad de la onda longitudinal.

23. Considere una cuerda de longitud L, masa m, sometida a tensión T.
a) Encuentre las frecuencias del primero y el segundo armónicos de las ondas estacionarias con un extremo de la cuerda fijo y el otro extremo libre.
b) Si el segundo armónico (ilustrado en la figura) tiene amplitud A_2, encuentre la ley de movimiento $y(t)$ para un vientre (antinodo) de la onda. Considere como condición inicial que en $t = 0$ la cuerda tiene deformación máxima.
c) Escriba la función de onda $y(x,t)$ para los dos armónicos, con la misma fase inicial considerada en (b).