CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES (OTOÑO 2015)

CONTROL 3 (PAUTA DE CORRECIÓN)

Las tres preguntas son obligatorias.

1.- [2 Ptos.] Calcule el área de la región acotada por la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a > b$. Y la recta $y = \frac{2}{3}b$.

Respuesta: Primero, notemos que la elipse con la recta se intersectan en los puntos $(-\frac{a}{3}\sqrt{5}, \frac{2}{3}b)$ y $(\frac{a}{3}\sqrt{5}, \frac{2}{3}b)$, lo que implica que el área de la región está descrita por el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{a}{3}\sqrt{5} \leq x \leq \frac{a}{3}\sqrt{5} \ \wedge \ \frac{2}{3}b \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

Por ende, basta calcular el área de la región $\mathcal{R}'$, descrita por la siguiente expresión:

$$\mathcal{R}' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{a}{3}\sqrt{5} \ \wedge \ \frac{2}{3}b \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

Luego, se sigue que el área de la región $\mathcal{R}'$, es:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}') &= \int\int_{\mathcal{R}'} dxdy, \\ &= \int_0^{\frac{a\sqrt{5}}{3}} \int_{\frac{2b}{3}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dydx, \\ &= \int_0^{\frac{a\sqrt{5}}{3}} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{2b}{3} dx \end{aligned}$$

Posteriormente, considere el cambio de variable:

$$\sin(\theta) = \frac{x}{a} \Rightarrow \cos(\theta)d\theta = \frac{dx}{a}$$

Por ende, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a\sqrt{5}}{3}} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx &= ab\int_0^{\arcsin(\frac{\sqrt{5}}{3})} \cos(\theta)^2 d\theta, \\ &= ab\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\arcsin(\frac{\sqrt{5}}{3})} \right), \\ &= ab\left\{ \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$A(\mathcal{R}') = ab\left\{\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) - \frac{2}{9}\sqrt{5}\right\}$$

Finalmente, como $A(\mathcal{R}) = 2A(\mathcal{R}')$, se tiene:

$$A(\mathcal{R}) = ab\left\{\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) - \frac{4}{9}\sqrt{5}\right\}.$$

2.- [2 Ptos.] Sean $m, n \in \mathbb{N}$, y considere la función $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\vec{F}(x, y) = (2xy + nx^{n-1}y^m, x^2 + mx^n y^{m-1})$$

Calcule la integral de linea:

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot d\sigma,$$

donde $\vec{\sigma} : [\ln(\frac{\pi}{2}), \ln(\pi)] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, está descrita por:

$$\vec{\sigma}(t) = (\sin(e^t), \cos(e^t))$$

Respuesta: Primero, notemos que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x + nmx^{n-1}y^{m-1} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Por ende, tenemos que $J\vec{F} = \{J\vec{F}\}^T$, donde $J\vec{F}$ representa la matriz Jacobiana asociada a la función $\vec{F}$. Por lo tanto, tenemos que existe una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

Ahora, para encontrar la función f, notemos que esta función debe cumplir:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int 2xy + nx^{n-1}y^m dx, \\ &= x^2 y + x^n y^m + A(y). \end{aligned} \tag{0.1}$$

Por otra parte, la función f también debe cumplir:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int x^2 + mx^n y^{m-1} dy, \\ &= x^2 y + x^n y^m + B(x). \end{aligned} \tag{0.2}$$

Por ende, de las expresiones (0.1) y (0.2), concluimos que:

$$A(y) = B(x) = K \in \mathbb{R} \text{ cte}, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, la función f está dada por:

$$f(x, y) = x^2 y + x^n y^m + K$$

Finalmente, por el Teorema fundamental del cálculo generalizado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_\sigma \vec{F} \cdot d\sigma &= \int_\sigma \vec{\nabla} f \cdot d\sigma, \\ &= f(\sigma(\ln(\pi))) - f(\sigma(\ln(\pi/2))), \\ &= f(0, -1) - f(1, 0), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que se concluye que:

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\sigma = 0$$

3.- [2 Ptos.] Calcule el área de la región descrita por la región $\mathcal{R}$ descrita por la FIGURA 1. Considere $e < c$.

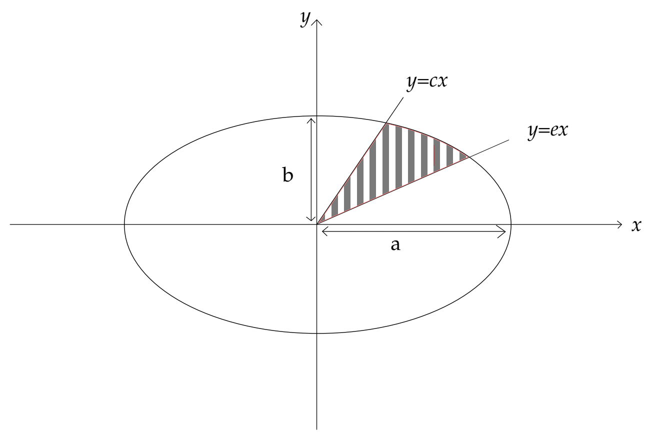

FIGURA 1. Región $\mathcal{R}$.

Respuesta: Tenemos que el área de la región descrita es:

$$A(\mathcal{R}) = \int\int_{\mathcal{R}} dxdy$$

Luego, considere el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos(\theta), \\ y &= br\sin(\theta). \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} r &\in [0,1], \\ \theta &\in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

Además, tenemos que:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos(\theta) & -ar\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & br\cos(\theta) \end{vmatrix} = abr.$$

Finalmente, por Teorema de cambio de variable aplicado a la función constante $f(x,y)=1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{R}} dxdy &= \int_{\arctan(e)}^{\arctan(c)} \int_0^1 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta, \\
&= \int_{\arctan(e)}^{\arctan(c)} \int_0^1 abr\ drd\theta, \\
&= \int_{\arctan(e)}^{\arctan(c)} \frac{1}{2}ab\ d\theta, \\
&= \frac{1}{2}ab \int_{\arctan(e)}^{\arctan(c)} d\theta, \\
&= ab\left(\frac{\arctan(c)-\arctan(e)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por lo que se conluye que:

$$A(\mathcal{R}) = ab\left(\frac{\arctan(c)-\arctan(e)}{2}\right).$$

"No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje; y no la posesión, sino el acto de llegar a ella, lo que concede el mayor disfrute.

-Carl Friedrich Gauß