¿Por qué no se puede calcular $\int e^{-x^2}\,dx$?

Dirce Braccialarghe

En las primeras fases del desarrollo del Cálculo muchos matemáticos trataron de encontrar, en forma explícita o exacta, la función integral o primitiva para toda función continua dada explícitamente. Pasó algún tiempo hasta que se comprendió que, en general, este problema no tiene solución. En efecto, para algunos integrandos bastante elementales la función integral no puede ser expresada en términos de funciones elementales. ¿Qué quiere decir esto? Simplemente que no puede expresarse a partir de la variable x y de las constantes, mediante un número finito de operaciones (adición, multiplicación, composición, potenciación, extracción de raíces) entre funciones polinómicas, trigonométricas y sus inversas, funciones exponenciales y logarítmicas. Es así que la función cuya ley viene expresada por $\dfrac{\arctan(\sqrt{x}+\log(x^3+5)}{x^{2/3}\cos\sqrt[3]{x}}$ resulta (aunque no lo parezca) elemental.

Intentos de expresar integrales indefinidas tales como (para $n > 2$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}}\,, \quad \int \sqrt{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}\,dx\,,$$

o bien

$$\int e^x \log x\,dx\,, \quad \int e^{e^x}\,dx\,, \quad \int \frac{1}{\log x}\,dx\,, \quad \int sen(x^2)\,dx\,, \quad \int \sqrt{sen\,x}\,dx\,, \quad \int e^{-x^2}\,dx$$

por medio de un número finito de operaciones sobre funciones elementales han fallado.

En el siglo XIX finalmente se probó que es realmente *imposible* llevar a cabo estas integraciones en términos de funciones elementales. La demostración de que una determinada integral no puede calcularse no es tarea fácil. Quien realizó numerosos aportes en el tema, entre los años 1833 y 1841, fue el matemático francés Joseph Liouville.

Es importante recordar que **la función integral de toda función continua existe** como un límite (Teorema Fundamental del Cálculo) y es ella misma una función continua, ya sea que pueda ser obtenida en términos de funciones elementales o no.

En el artículo *Funciones sin primitiva elemental* de Carlos Ivorra (4) se desarrolla el tema minuciosamente utilizando funciones de variable compleja. Allí puede encontrarse la definición rigurosa de función elemental (primero se introduce la definición de función elemental compleja para posteriormente definir función elemental real) y los principales resultados (se hace uso de los conceptos de función meromorfa y de la teoría de extensiones de cuerpo) relacionados con funciones elementales.

En la sección 3 del trabajo se demuestra que la suma, producto, cociente y composición de funciones elementales es una función elemental. Además allí puede verse que los polinomios a coeficientes reales y las funciones e^x, $\log x$, $sen\,x$, $\cos x$,

$arcsen\,x$, $\arccos x$, $\arctan x$, las funciones hiperbólicas (y sus inversas) son también funciones elementales.

En la sección 4 se da una condición necesaria y suficiente para que una función tenga una primitiva elemental.

En la sección 5 se demuestran los siguientes resultados:

a) Si $g(x)$ es un polinomio de grado ≥ 2, la integral $\int e^{g(x)}\,dx$ no es elemental.

b) $\int \frac{dt}{\log t}$ y (cambio de variable mediante) $\int \frac{e^x}{x} dx$ no son elementales.

c) $\int \frac{sen\,x}{x} dx$ no es elemental.

d) Si $f(x)$ es un polinomio de grado ≥ 2, las integrales $\int sen\, f(x)\,dx$ y $\int \cos f(x)\,dx$ no son elementales.

En la sección 7 se demuestra:

a) Si $0 < k < 1$, la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ no es elemental.

b) $\int \sqrt{x^3 - 1}\,dx$ no es elemental.

c) La integral $\int x^k (b + ax^h)^q \,dx$ donde $a, b \in R$, $h, k, q \notin Q$ son todos no nulos, es elemental si y sólo si al menos uno de los tres números q, $\frac{k+1}{h}$, $q + \frac{k+1}{h}$ es entero.

Las funciones sin primitiva elemental aparecen a menudo. Aquí, algunos ejemplos:

I) La función de densidad de la distribución normal (con media 0 y desviación típica 1) viene dada por la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$. Esto significa que la probabilidad de que una variable aleatoria con dicha distribución tome su valor en un intervalo $[a, b]$ viene dada por la integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt$.

II) El teorema de los números primos afirma que la función $\pi(x)$ definida como el número de números primos menores o iguales a x es asintóticamente igual a la integral logarítmica:

$$\pi(x) \approx \Pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

III) La curva Γ, llamada espiral de Cornu, definida por la función vectorial

$$\vec{r}(t)=\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du\ \vec{i}+\int_0^t sen\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du\ \vec{j}\quad ,\ t\in R_0^+ .$$

es utilizada como curva de transición en la construcción de rutas.

IV) Las integrales elípticas. Estas son integrales en las que el integrando depende racionalmente de la raíz cuadrada de un polinomio de tercer o cuarto grado. Entre estas integrales, la función $u(s)=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ ha llegado a ser particularmente importante. Su función inversa $s(u)$ prototipo de las llamadas *funciones elípticas*, también desempeña un papel importante.

Notemos que para $k=0$ se obtiene $u(s)=arcsen\, s$ y $s(u)=sen\, u$.

(1) Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático (Vol 1) – Courant-John-Ed. Limusa, México, 1979

(2) Brand, Cálculo avanzado.

(3) http://personal.us.es/freniche/docencia/am1_06_07/lec2sin_primitivas.pdf

(4) http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Primitivas.pdf