EJERCICIOS OPERADORES

1 Postguía 5

1.1

Supongamos que E, F son espacios de Banach y $T : E \to F$ es un operador lineal y acotado. Se sabe que $\widehat{E} := E/\ker(T)$ es un espacio de Banach. Se pone $\widehat{T} : \widehat{E} \to T(E) \subset F,\ \widehat{T}(\widehat{x}) := Tx$. Estudie $\widehat{T}$.

1.2

Encuentre operadores lineales y acotados con recorrido no cerrado.

1.3

Sean E, F y G tres espacios normados reales y sea $\phi : E \times F \to G$ una función bilineal. Demuestre que ϕ es continua si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\| \phi(x, y) \|_G \leq C \, \| x \|_E \, \| y \|_F \,, \quad \forall\, x \in E, y \in F \,.$$

1.4

Sean K_1, K_2 subconjuntos compactos de un álgebra normada E. Muestre que $K_1 \cdot K_2 \subset E$ es un conjunto compacto.

1.5

Sea $t_0 \in [0, 1]$ y $\delta_{t_0} : C[0, 1] \to \mathbb{R},\ \delta_{t_0}(\varphi) := \varphi(t_0)$.

Mostrar que φ es una funcional lineal, continua y multiplicativa. Calcular el núcleo, el recorrido y la norma de δ_0.

1.6

La evaluación $\delta_0(f) := f(0)$ es una funcionál lineal no acotada en $(C[-1, 1], \| \cdot \|_p)$ si $p \in [1, \infty)$.

1.7

Un subespacio de dimensión finita en un espacio normado cualquiera es cerrado.

1.8

Muestre que la topología discreta en un espacio vectorial de dimensión ≥ 1 no es definida por une norma.

1.9

Consideremos el operador de Volterra

$$T : C([0, 1]) \to C([0, 1]) \,, \qquad (Tf)(x) := \int_0^x f(y)dy \,.$$

1. T es bien definido, lineal y acotado. Estimar la norma $\| T \|$.
2. T es inyectivo. T no es sobreyectivo y no tiene recorrido denso.

1.10

Sean $(E_1, \| \cdot \|_1), (E_2, \| \cdot \|_2)$ espacios normados y $E := E_1 \times E_2$ el espacio producto con la norma

$$\| (x_1, x_2) \| := \| x_1 \|_1 + \| x_2 \|_2 \ .$$

Se definen las aplicaciones

$$J_1 : E_1 \to E \,, \quad J_1(x_1) := (x_1, 0_2) \,,$$
$$P_1 : E \to E_1 \,, \quad P_1(x_1, x_2) := x_1 \,.$$

1. Muestre que J_1 es un operador lineal y acotado; calcule su norma.
2. Muestre que P_1 es un operador lineal y acotado; calcule su norma.
3. Muestre que $\ker(P_1) \cap \operatorname{ran}(J_1) = \{(0_1, 0_2)\}$ y $\ker(P_1) + \operatorname{ran}(J_1) = E$.

1.11

Cada espacio l^p es un álgebra de Banach conmutativa con la multiplicación puntual. Por el otro lado, l^p es un ideal bilátero (no cerrado) en l^∞.

1.12

Sean $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ dos normas en el espacio vectorial E, la primera mas debil que la segunda. Si $A \subset E$, se denota por A_j la cerradura de A en la topología definida por la norma $\| \cdot \|_j$ y por B_j el interior de A en la topología definida por la norma $\| \cdot \|_j$. Quién es el mas grande, A_1 o A_2 ? Quién es el mas grande, B_1 o B_2 ? Sea K compacto de $(E, \| \cdot \|_1)$. Es K compacto de $(E, \| \cdot \|_2)$?

1.13

Sean $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ dos normas en el espacio vectorial E y $\| \cdot \|'_1$, $\| \cdot \|'_2$ dos normas en el espacio vectorial E'. Sea $\phi : E \to E'$ una función. Invente un ejercicio y resuelvelo.

1.14

Sean $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ dos normas en el espacio vectorial E. Para $j = 1, 2$ se denota por $E_j^\dagger := \mathbb{B}(E_j; \mathbb{K})$ el dual topológico de $(E, \| \cdot \|_j)$. Qué se puede decir de los espacios de Banach $E_1^\dagger$ y $E_2^\dagger$?

1.15

Sean E, E' dos espacios normados, E' completo, y $E_0 \subset E$ un subespacio vectorial denso. Sea $T_0 \in \mathbb{B}(E_0, E')$.

Entonces existe un único $T \in \mathbb{B}(E, E')$ tal que $T|_{E_0} = T_0$. Muestre que $\| T \|_{\mathbb{B}(E,E')} = \| T_0 \|_{\mathbb{B}(E_0,E')}$.