EJERCICIOS OPERADORES

1 Guía 4

1.1

Sean E, E' dos espacios normados reales. Supongamos que $T : E \to E'$ es continuo y aditivo.

Entonces T es homogéneo (luego lineal).

1.2

Si $\dim E = n,\ \dim E' = n'$, tenemos $\mathbb{B}(E, E') = \mathbb{L}(E, E')$ y $\dim \mathbb{L}(E, E') = nn'$.

1.3

Si E es un espacio normado, mostrar que el operador identidad

$$I : E \to E\,, \qquad I(x) := x$$

es lineal.

Mostrar por cinco métodos diferentes que I es continuo.

1.4

Se define

$$T : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}), \qquad (T\varphi)(t) := \varphi(t+1).$$

- Muestre que T es un operador lineal y acotado y calcule su norma.
- Calcule $\ker(T)$ y $\operatorname{ran}(T)$.

1.5

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una isometría, es decir un mapeo tal que la distancia euclidiana entre dos puntos $u, v \in \mathcal{H}$ es igual a la distancia entre sus imagenes $\phi(u), \phi(v)$. Se supone también que $\phi(0) = 0$. Muestre que ϕ es linear.

Hint: Utilice la identidad

$$\| u + v - w \|^2 = \| u - w \|^2 + \| v - w \|^2 - \| u - v \|^2 + \| u \|^2 + \| v \|^2 - \| w \|^2 \ .$$

1.6

Calcule la norma de un operador de multiplicación en $l^\infty(\mathbb{Z})$.

1.7

Consideremos el operador

$$T : l^1(\mathbb{N}) \to l^1(\mathbb{N}) , \quad (Tx)(j) := x(j+1) .$$

1. Mostrar que T es lineal y continuo.
2. Calcular la norma de T.
3. Calcular $\ker(T)$ y $\operatorname{ran}(T)$.
4. Calcular T^m para $m \in \mathbb{N}$.
5. Encontrar y estudiar un operador $S : l^1 \to l^1$ tal que $TS = \mathrm{Id}$.
6. Puede existir un operador $R : l^1 \to l^1$ tal que $RT = \mathrm{Id}$?

1.8

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se utiliza la norma $\| (x, y) \| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y el operador

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad T(x, y) := (ax + by, cx + dy) .$$

- Muestre que T es lineal.
- Encuentre una cota superior para $\| T \|_{\mathbb{B}(\mathbb{R}^2)}$ en terminos de los números a, b, c, d.

1.9

Encontrar un espacio de Banach E y quatro operadores $A, B, S, T \in \mathbb{B}(E)$ tales que

$$\| S + T \|_{\mathbb{B}(E)} < \| S \|_{\mathbb{B}(E)} + \| T \|_{\mathbb{B}(E)} ,$$

$$\| AB \|_{\mathbb{B}(E)} < \| A \|_{\mathbb{B}(E)} \| B \|_{\mathbb{B}(E)} ,$$

$$\| B + T \|_{\mathbb{B}(E)} = 2 .$$

1.10

Sean E un espacio de Banach y $\mathbb{B}(E)$ el espacio de Banach de operadores lineales y acotados de E en E, dotado de la norma usual. Sea $S \in \mathbb{B}(E)$.

a) La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!}$ es convergente; denotamos por e^S al operador al que converge dicha serie.

b) Pruebe que $Se^S = e^S S$; y que si $T, S \in \mathbb{B}(E)$ conmutan, entonces $e^{(S+T)} = e^S e^T$. En particular pruebe que e^S es invertible.

c) Muestre que $\forall\, t \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{e^{(t+h)S} - e^{tS}}{h} - Se^{tS} \right\| = 0,$$

Cuando E es de dimensión finita, que relación tiene e^S con el problema de resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales?

Hint: Use que $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|, \ \forall\, S, T \in \mathbb{B}(E)$, y en c) primero calcule el límite para $t = 0$.