

ANAGUIA 3

1

Calcule el complemento ortogonal del subespacio $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es continua, } f(t+5) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$.

2

Encontrar muchas bases ortonormales en l^2 .

3

Un espacio de Hilbert es separable (como espacio métrico) si y solo si tiene una base ortonormal a lo mas numerable.

4

Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de vectores de $\mathcal{H}$ que cumple la desigualdad $\sum_n \|x_n - e_n\|^2 < 1$.

Muestre por tres métodos diferentes que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genera un subespacio denso de $\mathcal{H}$.

5

En el espacio de Hilbert l^2 se considera el conjunto $A := \{e_n \mid n = 1, 3, 5, \dots\}$, donde $e_n(j) := \delta_{n,j}$.

Muestre que A no es una base ortonormal de l^2 .

6

Se define $F := \{x = (x(j))_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x(j) \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}\}$.

- Es F un subespacio vectorial de l^2 ?
- Es F cerrado?
- Es F abierto?

7

Sea el conjunto

$$M := \{x = (x(j))_{j \in \mathbb{N}} \mid x(j) \in \mathbb{C}, |x(j)| \leq 1/j, \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Muestre que M es un subconjunto compacto de l^2 y M no es vecindad de ningun punto.

8

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ una isometría, es decir un mapeo tal que la distancia euclidiana entre dos puntos $u, v \in \mathcal{H}$ es igual a la distancia entre sus imágenes $\phi(u), \phi(v)$. Se supone también que $\phi(0) = 0$. Muestre que ϕ es lineal.

Hint: Utilice la identidad

$$\|u + v - w\|^2 = \|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 - \|u - v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|w\|^2.$$

9

Si A, B son dos conjuntos, se escribe $\#(A) \leq \#(B)$ si existe una función inyectiva $\varphi : A \rightarrow B$.

- Muestre que se trata de una relación de preorden.
- Cómo se puede caracterizar la equivalencia asociada a esta preorden?

Sean $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ dos espacios de Hilbert. Se escribe $\dim(\mathcal{H}) \leq \dim(\mathcal{K})$ si existen b.o.n. $A \subset \mathcal{H}$ y $B \subset \mathcal{K}$ tal que $\#(A) \leq \#(B)$.

- Verifique que, si $A' \subset \mathcal{H}$ y $B' \subset \mathcal{K}$ son dos otras b.o.n., se tiene $\#(A') \leq \#(B')$.
- Muestre que $\dim(\mathcal{H}) \leq \dim(\mathcal{K})$ sss existe una isometría lineal $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$.

Sea $\mathcal{H}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathcal{K}$.

- Interpreta a $\mathcal{H}$ como un espacio de Hilbert.
- Demuestre que $\dim(\mathcal{H}) \leq \dim(\mathcal{K})$.

10

En el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se supone que la esfera $S := \{x \in \mathcal{H} \mid \|x\| = 1\}$ es cerrada en la topología débil.

Muestre que $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita.

11

Sean $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\{e'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dos bases ortonormales del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sabemos que $e'_n = e_n$ si $n \neq 5$. Que se puede decir de los vectores e_5 y e'_5 ?

12

En el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ el subconjunto

$$M := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ continua}, |f(t)| \leq 1/t^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(s) = 0 \text{ si } |s| < 1/7\}$$

no es denso.