# GUÍA 1 ANÁLISIS

## 1

En el espacio vectorial $\mathbb{R}$ se define la función

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty) , \quad d(x, y) := |\, x^3 - y^3| \, .$$

(a) Probar que $d$ es una distancia.

(b) Mostrar que no existe una norma $\| \cdot \|$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$d(x, y) = \| \, x - y \, \| \, , \quad \forall \, x, y \in \mathbb{R} \, .$$

## 2

En cada conjunto $E \neq \emptyset$ se considera *la métrica discreta*:

$$\delta(x, x) = 0 \, , \quad \delta(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y \, .$$

1. De verdad $\delta$ es una métrica.
2. Con respecto a esta métrica se tiene

$$B(x; r) = \{x\} \text{ si } 0 < r \leq 1 \, , \qquad B(x; r) = E \text{ si } r > 1 \, .$$

3. Cada subconjunto de $E$ es abierto (la topología generada por $\delta$ es la topología discreta).
4. Supongamos que $E$ es un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ . Entonces $\delta$ no es definida por una norma.

## 3

Se define

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \, , \quad d(x, y) := |e^x - e^y| \, .$$

- Muestre que $d$ es una distancia.
- Existe una norma $\| \cdot \|$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = \| x - y \|$ para todos los elementos $x, y \in \mathbb{R}$ ?

## 4

Dar tres (otros) ejemplos de distancias en $E = \mathbb{R}^n$ que no son definidas por normas.

## 5

Mostrar que $\| \cdot \|_\infty$ es una norma en $C([a, b])$ .

## 6

El espacio vectorial real $C([0,1])$ no tiene dimensión finita.

## 7

Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

- Muestre la identidad de polarización:

$$4\,\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{4} i^k \big\langle x + i^k y, x + i^k y \big\rangle \ , \quad \forall\, x, y \in X \ .$$

- Muestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es simétrica si y solo si $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ .
- Qué sucede en el caso real?

## 8

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial complejo con producto escalar. Se preserva la misma adición, se define la nueva multiplicación con escalares

$$\alpha \bullet x := \overline{\alpha}\, x$$

y la función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\bullet} : X \times X \to \mathbb{C}\,, \quad \langle x, y\rangle_{\bullet} := \langle y, x\rangle \ .$$

Muestre que $\big(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\bullet}\big)$ es un (nuevo) espacio con producto escalar. Se llama *el opuesto del espacio* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

## 9

Sean $x, y$ elementos de $E$ , espacio con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma asociada $\| \cdot \|$ .

Se tiene $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ si y solo si $y = 0$ o $x = \lambda y$ para un $\lambda \geq 0$ .

## 10

El producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ es una función continua.

La adición y la multiplicación con escalares son funciones uniformemente continuas.

## 11

Sean $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ dos productos escalares definidos en el espacio vectorial $E$ . Es $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por

$$\langle x, y\rangle := \langle x, y\rangle_1 + \langle x, y\rangle_2$$

un producto escalar?

## 12

Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio normado. Si cada subespacio de dimensión $2$ de $E$ es un espacio con producto escalar, entonces $E$ es un espacio con producto escalar.

## 13

En el espacio vectorial $c_F$ , para cada $p \in [1, \infty)$ , se define

$$\| (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \|_p := \left( \sum_n |\alpha_n|^p \right)^{1/p} .$$

Si $p = \infty$ se pone

$$\| (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| .$$

- Cada $\| \cdot \|_p$ es une norma.
- La norma $\| \cdot \|_p$ corresponde a un producto escalar si y solo si $p = 2$ .

## 14

Un semi-producto escalar en el espacio vectorial $E$ se define como el producto escalar, pero el subespacio vectorial $E_0 := \{x \in E \mid \langle x, x \rangle = 0\}$ puede no ser trivial. Muestre que $E/E_0$ tiene un producto escalar natural.

## 15

Completando un espacio con producto escalar, se consigue un espacio de Hilbert.

## 16

Verifique que $l^2(I)$ es un espacio de Hilbert.

## 17

En un espacio con producto escalar se tiene

$$\| x \| = \sup_{\|y\|=1} | \langle x, y \rangle | = \sup_{\|y\|\leq 1} | \langle x, y \rangle | , \qquad \forall\, x \in E .$$

## 18

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$.
Demuestre que hay un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ sobre $\mathbb{C}$ (la *complexificación* del $\mathcal{H}$) y una aplicación $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ tal que:

- $U$ es lineal,
- $\langle Uh_1, Uh_2 \rangle_{\mathcal{K}} = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}}$ para todos $h_1, h_2$ en $\mathcal{H}$ ,
- para cualquier $k$ en $\mathcal{K}$ existen y son unicos $h_1, h_2$ en $\mathcal{H}$ tal que $k = Uh_1 + iUh_2$.

## 19

Si $\{h_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\sum_n \|h_n\| < \infty$ , entonces demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ converge en $\mathcal{H}$.