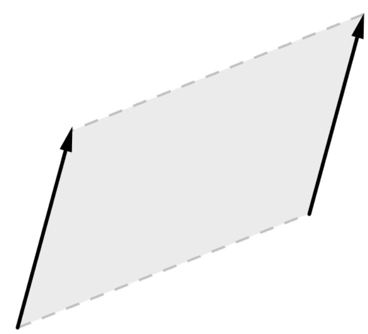
2. Vectores en el plano

Los vectores son objetos matemáticos que poseen un valor numérico (su magnitud) y una dirección, como los segmentos rectilíneos, pero además poseen un sentido que indica, en el segmento, cual extremo es inicial y cual extremo es final, es decir, se distingue punto inicial y punto final. Por ello se acostumbra a representarlos por flechas, siendo muy útiles para representar fuerzas en Física.

Sin embargo, esa descripción es incompleta, ya que dos vectores que poseen la misma magnitud, son paralelos, y tienen el mismo sentido pero tienen puntos iniciales (y por tanto finales) diferentes, serán "el mismo vector". Esto se indica habitualmente como que la "flecha" se puede desplazar sin rotarla y sigue siendo el mismo vector.

Definición 2.1. *Diremos que un vector es lo que hay de común a segmentos orientados equivalentes, es decir, segmentos en que se distingue un extremo como punto inicial y el otro como punto final, donde la equivalencia viene dada por formar un paralelógramo en el caso de segmentos no colineales, como se muestra en la figura, en que los segmentos orientado son equivalentes y corresponden al mismo vector:*



Observación 2.1. 1. *En general representaremos los puntos por letras mayúsculas, como P y Q, por ejemplo, mientras que para los vectores usaremos letras minúsculas con flecha, como $\vec{v}$ y $\vec{w}$.*

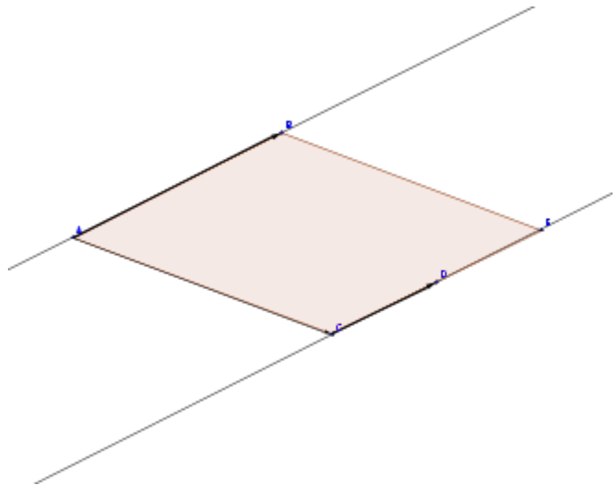
2. *Si A y B son puntos del plano, el segmento orientado de A hasta B determina un único vector denotado $\overrightarrow{AB}$.*

3. *Como caso especial, consideramos el vector nulo o vector cero $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, que será necesario luego.*

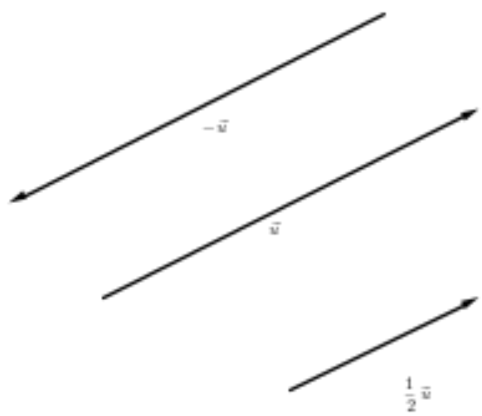
4. *Si $ABDC$ son vértices consecutivos de un paralelógramo, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (dibuje y comprenda)*

5. *Diremos que dos vectores son paralelos cuando cualquier segmento orientado de uno de ellos es paralelo a cualquier segmento orientado del otro vector, esto es, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ si las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas.*

6. *En el caso $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, podemos copiar el segmento de A hasta B sobre la recta $\overleftrightarrow{CD}$ de modo que se obtenga un punto E sobre $\overleftrightarrow{CD}$ con $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. Observa:*



7. *Debido a lo anterior, en el caso $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ tenemos que la magnitud de uno de ellos es proporcional a la magnitud del otro. Por ello consideramos que un vector $\vec{v}$ se puede "ponderar" por un valor numérico k llamado "escalar" (como contrapuesto a "vector") produciendo un vector paralelo $k\vec{v}$; si $k > 0$ se tiene que $k\vec{v}$ preserva el sentido del vector, si $k = 0$ se obtiene $\vec{0}$, pero si $k < 0$ el sentido de $k\vec{v}$ es opuesto al sentido de $\vec{v}$. Observa la figura*



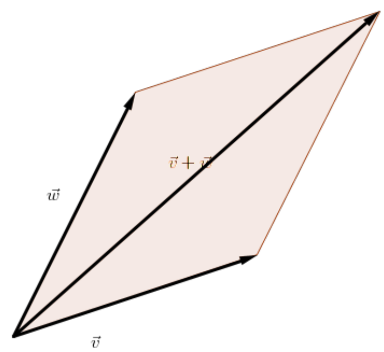
8. *Entonces para vectores no nulos se cumple $\vec{v} \parallel \vec{w}$ exactamente cuando existe $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$ y $\vec{v} = k\vec{w}$.*

9. *La norma o magnitud de* $\vec{v}$ *se denota* $\left\|\vec{v}\right\|$

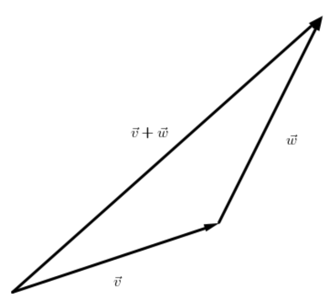
10. *Por lo dicho antes, se obtiene* $\left\|k\vec{v}\right\| = |k| \left\|\vec{v}\right\|$ *(donde* $|k|$ *es el valor absoluto de* k*)*

11. *La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une y, por tanto, es la norma del vector que ellos detemrminan:* $d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

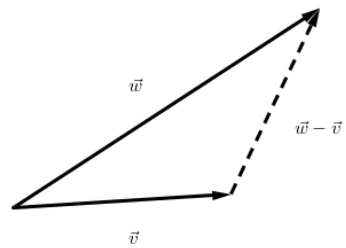
12. *La suma de vectores se obtiene de la Ley del Paralelógramo (habitual al considerar fuerzas concurrentes en un punto) como muestra la figura:*



13. *La suma también se puede considerar concatenando los vectores (habitual al considerar vectores como desplazamiento)*



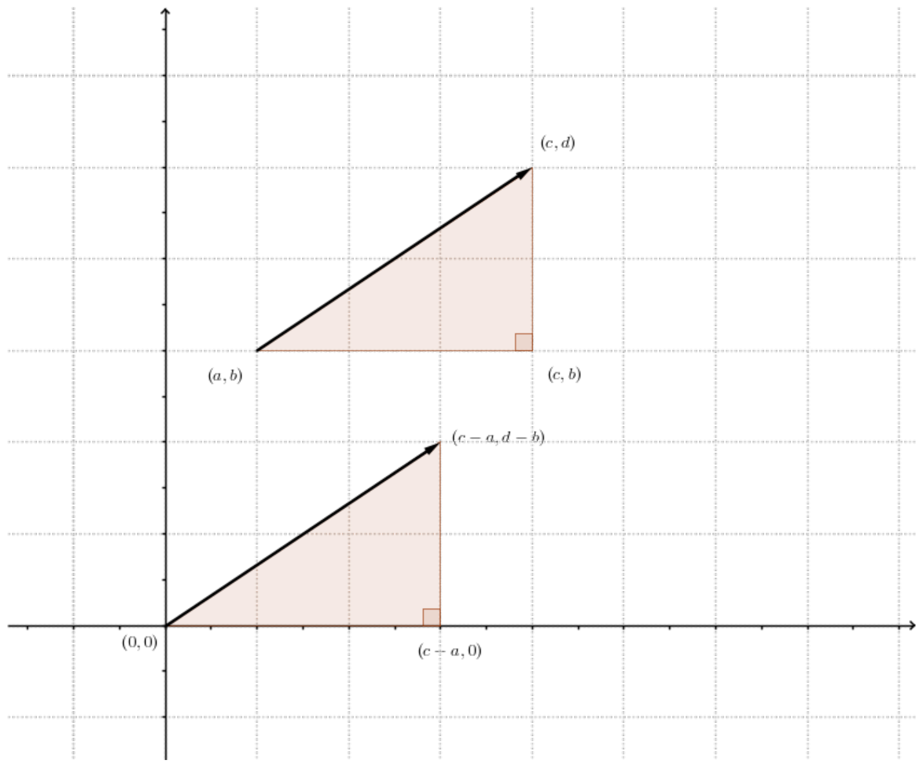
14. *La resta se obtiene aprovechando la idea anterior:*



2.1. Vectores en el plano coordenado

En el Plano Coordenado $\mathbb{R}^2$, formado por coordenadas de los puntos del plano de la forma (x, y), los vectores se determinan indicando un punto final, asumiendo que el punto inicial sea el origen del sistema coordenado, $(0, 0)$, de modo que (a, b) representa, según como lo interpretemos, al punto con primera coordenada a y segunda coordenada b, o bien al vector correspondiente al segmento orientado con punto inicial $(0, 0)$ y punto final (a, b); es importante evitar la confusión entre ambas formas de interpretar un par ordenado.

Podemos notar que la idea del paralelógramo para representar segmentos orientados equivalentes nos permite deducir las coordenadas que representan a un vector determinado por un segmento orientado que va del punto $P = (a, b)$ al punto $Q = (c, d)$ por el segmento orientado que va de $(0, 0)$ al punto $(c - a, d - b)$ como muestra la figura, recordando congruencia de triángulos:



Definición 2.2. *El vector determinado por el segmento con punto inicial* (a,b) *y el punto final* (c,d) *es* $(c-a,d-b)$.

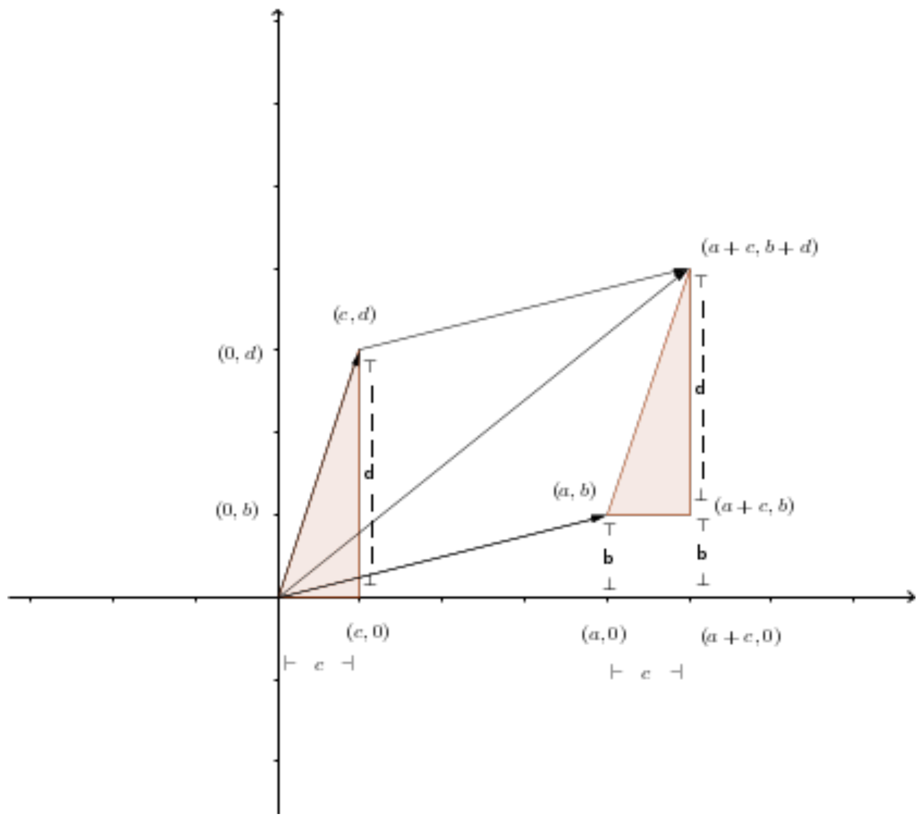
Observación 2.2. *El origen del sistema de coordenadas, es decir, el punto* $(0,0)$*, es denotado habitualmente por la letra* O*. Por ello, el vector nulo es* $\vec{0} = \overrightarrow{OO} = (0,0)$.

Las operaciones con vectores resultan simples coordenada a coordenada:

Proposición 2.1. *Para todos* $k \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *y* $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ *se cumple*

1. $k(a,b) = (ka,kb)$
2. $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$
3. $(a,b)-(c,d) = (a-c,b-d)$

Para la suma, observa el dibujo:



Proposición 2.2. *La norma o magnitud del vector* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *es* $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Demostración. Como la norma del vector es igual a la longitud de cualquiera de los segmentos orientados que determinan al vector, y como el vector (a, b) corresponde al segmento orientado que va del punto $(0, 0)$ al punto (a, b), entonces la noción de distancia entre puntos dada por el Teorema de Pitágoras indica que esa longitud, y por tanto la norma del vector (a, b), es $\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\square$

La perpendicularidad es más complicada, pero hay una forma de resolverla gracias, nuevamente, al Teorema de Pitágoras:

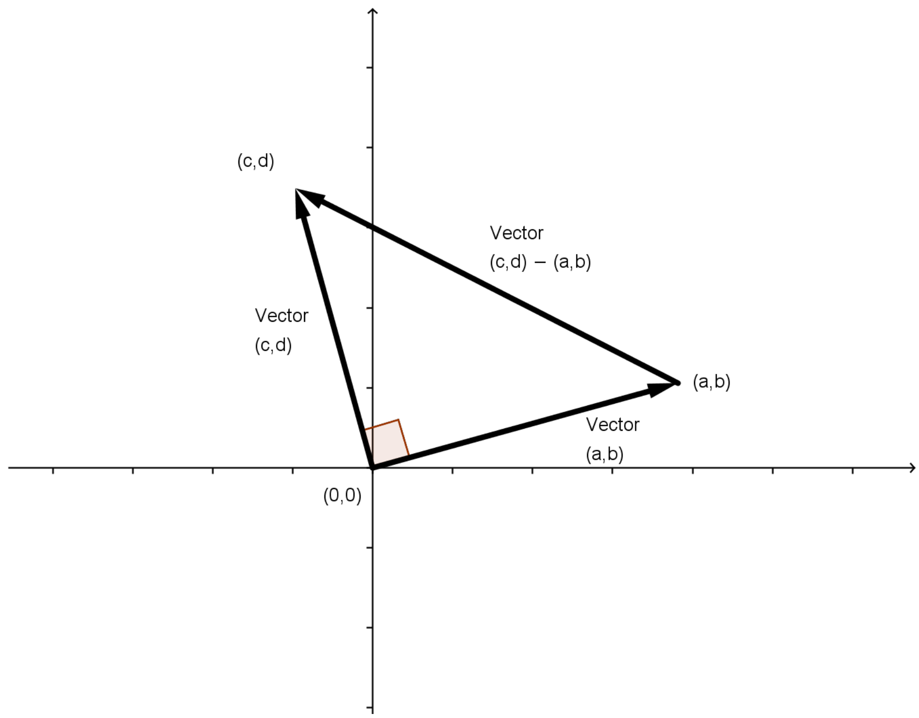
Proposición 2.3. *Los vectores no nulos y no distintos* (a, b) *y* (c, d) *son perpendiculares ssi* $ac + bd = 0$.

Demostración. Como los vectores (a, b) y (c, d) son determinados por los segmentos orientados desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto (a, c), y desde $(0, 0)$ hasta (c, d) respectivamente, entonces:

(a, b) es perpendicular a (c, d)

ssi tales segmentos son perpendiculares

ssi $(0, 0)$, (a, b) y (c, d) forman los vértices de un triángulo rectángulo en $(0, 0)$



ssi $\left\|(a,b)\right\|^2 + \left\|(c,d)\right\|^2 = \left\|(a,b)-(c,d)\right\|^2 = \left\|(a-c,b-d)\right\|^2$

ssi $(a^2+b^2)+(c^2+d^2) = (a-c)^2+(b-d)^2 = (a^2-2ab+b^2)+(c^2-2cd+d^2)$

ssi $0 = -2(ac+bd)$

ssi $ac+bd=0$

$\square$

Ejemplo 2.1. *Los vectores* $(3,2)$ *y* $(-2,3)$ *son perpendiculares, ya que* $3\cdot(-2)+2\cdot 3 = -6+6=0$. $\square$

2.2. Ecuación vectorial de la recta

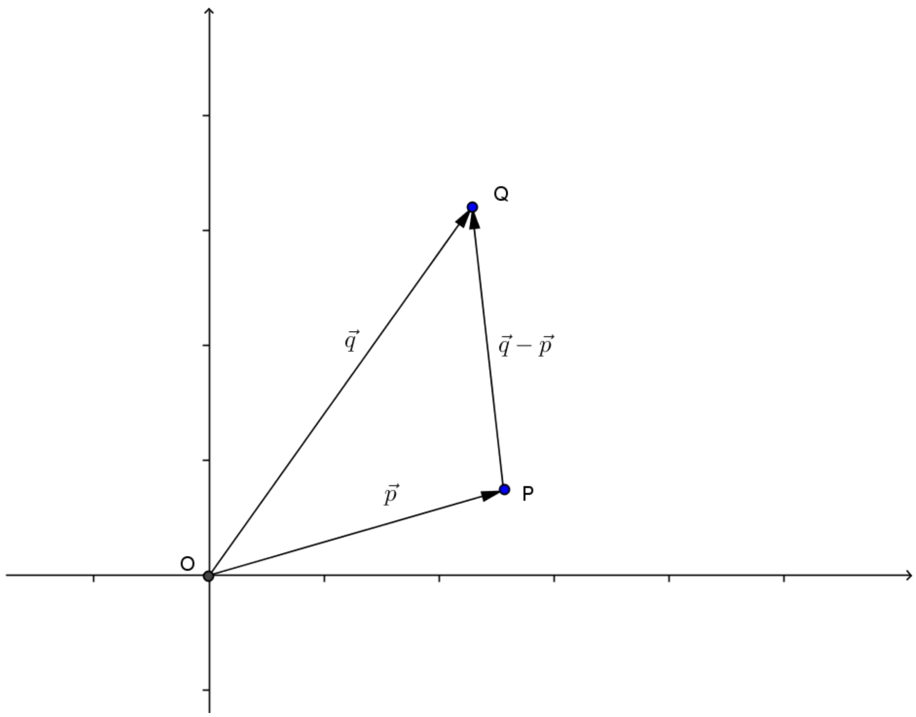
Definición 2.3 (Vector posición de un punto)**.** *Dado un punto* $P=(a,b)$ *del plano, el vector* $\vec{p}=(a,b)$ *es llamado "vector posición" del punto y se cumple* $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$.

Observación 2.3.

1. *Una recta* L *que contiene a (o pasa por) el origen* O *y a un punto* P *consta de todos los puntos* X *tales que los segmentos* OP *y* OX *son paralelos.*

2. *Usaremos la convención de que el vector posición de un punto* P *se denota* $\vec{p}$ *(con la letra minúscula respectiva)*

Proposición 2.4. *El vector determinado por el segmento orientado que va del punto* P *al punto* Q *cumple* $\overrightarrow{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=\vec{q}-\vec{p}$.



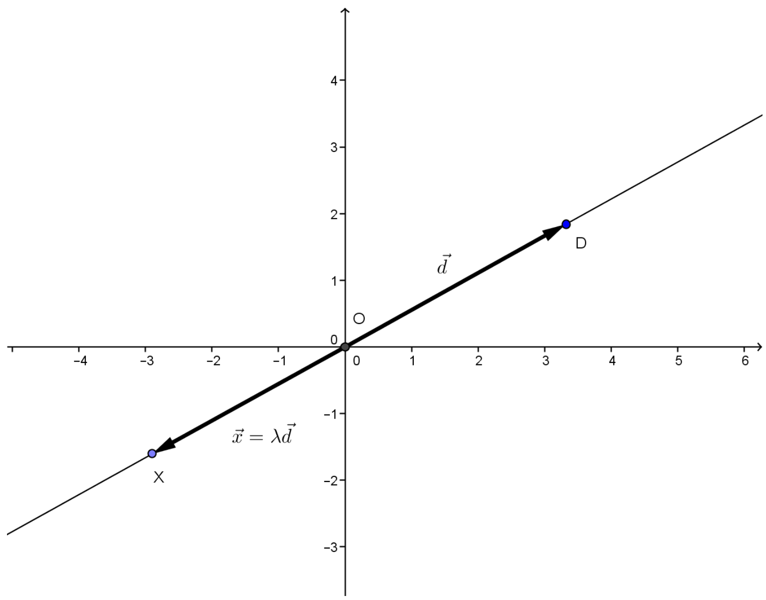
Proposición 2.5 (Ecuación vectorial de la recta por el origen)**.** *La recta L que contiene a O y a D, donde $D \neq O$, tiene ecuación vectorial*

$$\vec{x} = \lambda \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

es decir que hay un punto X en la recta para cada valor de λ en $\mathbb{R}$, derterminado por su vector posición $\lambda \vec{d}$.

Demostración. Sea X un punto de L, distinto de O y de D, con vector posición $\vec{x}$. Por la defininción de recta, el segmento OX es paralelo al segmento OD, y por tanto los vectores posición $\vec{x}$ y $\vec{d}$ cumplen $\vec{x} \parallel \vec{d}$, por lo que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ con $0 \neq \lambda \neq 1$ y $\vec{x} = \lambda \vec{d}$. Si $\lambda = 0$ se tiene $\vec{x} = \vec{0}$, es decir, $X = O$, y $\lambda = 1$ se tiene $\vec{x} = \vec{d}$, es decir, $X = D$.

Luego, todo punto X de L tiene vector posición $\vec{x} = \lambda \vec{d}$ $\square$

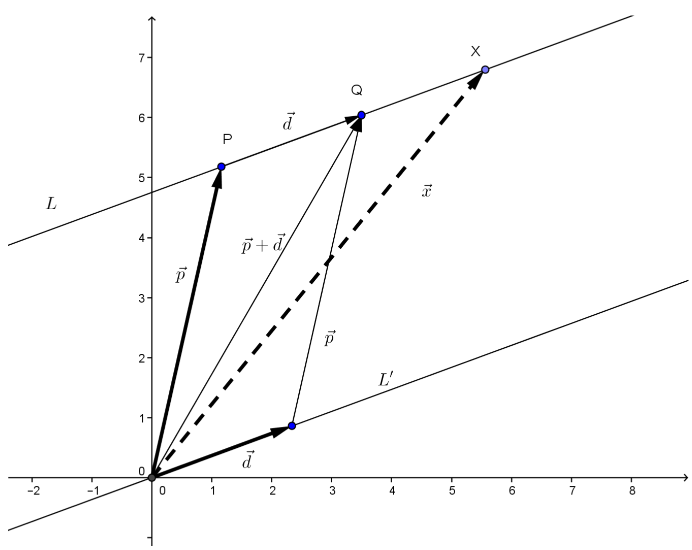


Definición 2.4. *En la recta $\vec{x} = \lambda\vec{d}$, con $D \neq O$, el vector $\vec{p}$ se conoce como "vector director" de la recta, y es paralelo a ella.*

Para describir una recta L que no pasa por el origen, consideramos la recta L' paralela a L que pasa por el origen, y un punto arbitrario P en L:

Proposición 2.6 (Ecuación vectorial de una recta)**.** *Si L es una recta que pasa por P y es paralela al vector $\vec{d} \neq \vec{0}$, su ecuación vectorial es*

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



Demostración. Sea D el punto de vector posición $\vec{d}$. Notemos que $\vec{p} + \vec{d}$ es el vector posición de un punto Q que cumple que $ODQP$ es un paralelógramo, de modo que el segmento PQ es paralelo a L, y de hecho $\overrightarrow{PQ} = \vec{d}$.

Si X, con vector posición $\vec{x}$, pertenece a L, se tiene que el segmento PX es paralelo al segmento PQ, es decir, $\overrightarrow{PX} \parallel \overrightarrow{PQ}$. Pero $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$ y $\overrightarrow{PQ} = \vec{d}$ y por tanto $\vec{x} - \vec{p} \parallel \vec{d}$, por lo que $\vec{x} - \vec{p} = \lambda\vec{d}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

De ese modo, la ecuación vectorial de la recta que pasa por P y es paralela a $\vec{d}$ es

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Ejemplo 2.2. *Obtener la ecuación algebraica de la forma $y = mx + n$ (ecuación "principal") para la recta que pasa por $P = (2,5)$ y que es paralela al vector $\vec{d} = (1,2)$.*

<u>Solución</u>: Sea $X = (x, y)$ un punto de la recta con vector posición $\vec{x}$ [1]. Como la ecuación vectorial de la recta es $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{d} = (2,5) + \lambda(1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene $(x, y) = (2,5) + \lambda(1,2)$ y entonces, coordenada a coordenada:

$$x = 2 + \lambda \quad \text{y} \quad y = 5 + 2\lambda$$

es decir

$$x - 2 = \lambda = \frac{y-5}{2}$$

de donde $y - 5 = 2(x - 2)$, es decir, $y = 2x + 1$ □

Observación 2.4.

1. *El proceso anterior se denomina "eliminación del parámetro".*
2. *Note que de la ecuación vectorial de la recta se puede obtener la ecuación general de la misma recta dada por $ax + by + c = 0$, donde a y b no son simultáneamente 0. En el ejemplo anterior, se tiene la ecuación general $2x - y + 1 = 0$.*
3. *Note que si el vector director de una recta es vertical no se podrá escribir de la forma algebraica $y = mx + n$, ya que no existe pendiente para ella, sino por una ecuación del tipo $x = h$, ya que todos sus puntos tendrán la misma primera coordenada h, y además su vector director puede ser de la forma $(0, b)$ con $b \neq 0$, por ejemplo, $(0, 1)$, y entonces su ecuación vectorial se puede escribir de la forma $\vec{x} = \vec{p} + \lambda(0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

[1] no confunda coordenada x con vector $\vec{x}$