UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantías 14−A y 14−B

Primitivas e Integrales

Semana del Viernes 20 al Jueves 26 de Junio

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int (3x^2 + 2x + 7)\ \mathrm{d}x$ *c)* $\displaystyle\int x^{-3/5}\ \mathrm{d}x$ *e)* $\displaystyle\int (x^{1/5} + x^{2/3} + x^5)\ \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int 6x^2\ \mathrm{d}x$ *d)* $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ *f)* $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{4} + x^2 + 3\right)\ \mathrm{d}x$

Solución: **Para a):**

Una primitiva de $(3x^2+2x+7)$ es (x^3+x^2+7x), pues $(x^3+x^2+7x)' = (3x^2+2x+7)$. Pero también vemos que (x^3+x^2+7x+8) es primitiva de $(3x^2+2x+7)$, pues $(x^3+x^2+7x+8)' = (3x^2+2x+7(+0))$.

En realidad, existen infinitas primitivas de $(3x^2+2x+7)$; todas ellas se pueden escribir de la forma $\boxed{x^3+x^2+7x+C\ ,\ C\in\mathbb{R}}$. Luego, la integral (indefinida) de $(3x^2+2x+7)$ representa a todas estas primitivas; es decir:

$$\int (3x^2+2x+7)\ \mathrm{d}x = x^3+x^2+7x+C\ ,\ C\in\mathbb{R}$$

Para b):

$$\int 6x^2\ \mathrm{d}x = 2x^3 + C\ ,\ C\in\mathbb{R} \qquad \text{pues} \qquad (2x^3)' = 2\cdot 3x^2 = 6x^2$$

Para c):

$$\int x^{-3/5}\ \mathrm{d}x = \frac{5}{2}x^{2/5} + C\ ,\ C\in\mathbb{R} \qquad \text{pues} \qquad \left(\frac{5}{2}x^{2/5}\right)' = \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}x^{-3/5} = x^{-3/5}$$

Para d):

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{x} + C\ ,\ C\in\mathbb{R} \qquad \text{pues} \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Para e):

$$\int (x^{1/5}+x^{2/3}+x^5)\ \mathrm{d}x = \frac{5}{6}x^{6/5}+\frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{x^6}{6}+C\ ,\ C\in\mathbb{R} \quad \text{pues} \quad \left(\frac{5}{6}x^{6/5}+\frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{x^6}{6}\right)' = x^{1/5}+x^{2/3}+x^5$$

Para f):

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{4} + x^2 + 3\right)\ \mathrm{d}x = \sqrt{x}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{3}+3x+C \quad \text{pues} \quad \left(\sqrt{x}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{3}+3x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x^3}{4}+x^2+3\ \square.$$

2. Determinar la función f que cumple:

- $f'(x) = 4x^2 + 1$
- $f(0) = 3$

Solución:

En primer lugar, buscaremos todas las funciones que satisfacen la primera condición; es decir:

$$f_C(x) = \int (4x^2 + 1)\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3 + x + C \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{f_C(x) = \frac{4}{3}x^3 + x + C\ ,\ C \in \mathbb{R}}$$

Ahora falta satisfacer la segunda condición; es decir:

$$f_C(0) = 3 = \cancelto{0}{\frac{4}{3}(0)^3} + \cancel{(0)} + C = C \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{C = 3}$$

Por lo tanto, la función f que cumple lo pedido será:

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3}x^3 + x + 3} \ \square.$$

3. Si f y g son funciones derivables, determinar $\displaystyle\int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\ \mathrm{d}x$

Solución:

Tal como hemos hecho hasta ahora, buscamos una primitiva de la función a integrar.
De la parte de Derivadas sabemos que $\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$; luego, se obtiene:

$$\boxed{\int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) + C\ ,\ C \in \mathbb{R}} \ \square.$$