Ay. 10-A y 10-B

1. Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x+1}$.

(A) Determinar el dominio (más amplio) de f.

(B) Determinar si f es inyectiva.

(C) Si f no es inyectiva, restringir el dominio para que f sí sea inyectiva.

Sol: (A)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{3}{x^2+x+1} \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x+1 \neq 0\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \neq 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \quad \neq 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \neq -\right\} \quad \left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$$

(B) f será inyectiva si $f(x) = f(y) \longrightarrow x = y$, $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$.

$$f(x) = f(y) \longrightarrow \frac{3}{x^2+x+1} = \frac{3}{y^2+y+1}$$

$$\longrightarrow \cancel{3}(x^2+x+1) = \cancel{3}(y^2+y+1) \longrightarrow x^2+x+1 = y^2+y+1$$

$$\longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{3}{4}} = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{3}{4}} \longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\longrightarrow \pm\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pm\left(y+\frac{1}{2}\right)$$ ¡Depende del signo de la raíz!

Luego, f no es inyectiva.

(c) Para que f sea inyectiva, basta con garantizar que (2)
$x+\frac{1}{2} \geq 0$; es decir, $x \geq -\frac{1}{2}$. Así, $Dom^*(f) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Con ello: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2$

$$\longrightarrow \quad x+\cancel{\frac{1}{2}} = y+\cancel{\frac{1}{2}}$$

$$\longrightarrow \quad x = y$$

Luego, f será inyectiva si $Dom^*(f) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. //

(2) Sea $f: [0,+\infty[\, \rightarrow T \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$.

(A) Determinar el conjunto T para que f sea sobreyectiva.

(B) Determinar si f es biyectiva. Si lo fuera, calcular la función inversa f^{-1}.

Sol: (A) Para que f sea sobreyectiva, debe ocurrir que $T = Rec(f)$.
Luego:

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \wedge x \in [0,+\infty[\,\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1 \wedge x \geq 0\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R} \mid y+1 = x^2 \wedge x^2 \geq 0\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R} \mid y+1 \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$$

$$\boxed{Rec(f) = [-1,+\infty[}$$

Luego, f será sobreyectiva si $\boxed{T = [-1,+\infty[}$.

(B) Para que f sea biyectiva, debe ocurrir que f sea inyectiva y sobreyectiva. Luego, si $x, y \in Dom(f)$

$$f(x) = f(y) \longrightarrow x^2 - \cancel{1} = y^2 - \cancel{1} \longrightarrow x^2 = y^2 \;/\; \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow x = y.$$

Luego, f es inyectiva.

Ya sabemos que f será sobreyectiva si $T = [-1, +\infty[$.

Luego, $f: [0, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[$ es biyectiva. 3

Ahora,

$$y = x^2 - 1 \longrightarrow x^2 = y + 1 \ (x \geq 0) \longrightarrow x = \sqrt{y+1}$$

Con ello, la función inversa de f es:

$$\boxed{f^{-1}: [-1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\ , \ f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}}$$

3 Sea $f: \text{Dom}(f) \longrightarrow T \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+7}{2x+1}$.

A Determinar el dominio y recorrido (más amplios) de f.

B Determinar si f es biyectiva. Si lo fuera, calcular f^{-1}.

Sol: A

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+7}{2x+1} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 \neq 0\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \left]-\infty, -\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[= \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{2}\right\}}$$

$$\text{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \wedge x \in \mathbb{R} - \{-1/2\}\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x+7}{2x+1} \wedge x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \mid y(2x+1) = x+7 \wedge x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \mid 2xy + y = x+7 \wedge x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \mid 2xy - x = 7 - y \wedge x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \mid x(2y-1) = 7 - y \wedge x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7-y}{2y-1} \wedge x \neq -\frac{1}{2} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{7-y}{2y-1} \neq -\frac{1}{2} \wedge 2y-1 \neq 0 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid 7-y \neq -\frac{(2y-1)}{2} \wedge y \neq -\frac{1}{2} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid 7-\cancel{y} \neq \frac{1}{2} - \cancel{y} \wedge y \neq -\frac{1}{2} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid 7 \neq \frac{1}{2} \wedge y \neq -\frac{1}{2} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq -\frac{1}{2} \}$$

$$\boxed{Rec(f) =]-\infty, -\tfrac{1}{2}[\cup]-\tfrac{1}{2}, +\infty[= \mathbb{R} - \{-\tfrac{1}{2}\}}$$

B) * Inyectividad: Sean $x, z \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

$$f(x) = f(z) \longrightarrow \frac{x+7}{2x+1} = \frac{z+7}{2z+1}$$

$$\longleftrightarrow (x+7)(2z+1) = (z+7)(2x+1)$$

$$\longrightarrow \cancel{2xz} + x + 14z + \cancel{7} = \cancel{2xz} + 14x + z + \cancel{7}$$

$$\longrightarrow x + 14z = 14x + z \longrightarrow \cancel{13}z = \cancel{13}x \longrightarrow z = x$$

Luego, f es inyectiva.

* Sobreyectividad:
Como $T = Rec(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, se tiene que f es sobreyectiva.

Luego, f es biyectiva, por lo que f tiene inversa:

$$y = \frac{x+7}{2x+1} \rightarrow \cdots \rightarrow x = \frac{7-y}{2y-1}$$

Así, $\boxed{f^{-1}: \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\},\ f^{-1}(x) = \frac{7-x}{2x-1}}$

④ Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 2 \\ 4-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Demostrar que f es biyectiva y calcular f^{-1}

Sol: * Inyectividad:

(i) $x \leq 2, z \leq 2$

$f(x) = f(z) \to \cancel{2}-x = \cancel{2}-z \to z = x.$

(ii) $x > 2, z > 2$

$f(x) = f(z) \to \cancel{4}-2x = \cancel{4}-2z \to \cancel{2}z = \cancel{2}x \to z = x$

(iii) $x \leq 2, z > 2 \quad (x \neq z)$

$f(x) = f(z) \to 2-x = 4-2z \to 2-x = 2(2-z)$

$\to 1 - \frac{x}{2} = 2 - z \to z = 2 - 1 + \frac{x}{2} \to \boxed{z = 1 + \frac{x}{2}} \quad (z \neq x)$

$z > 2 \to 1 + \frac{x}{2} > 2 \to \frac{x}{2} > 1 \to x > 2$ ¡Falso! $(x \leq 2)$

Entonces $f(x) \neq f(z)$.

Luego, f es inyectiva.

* Sobreyectividad:

$Rec_1(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2-x \wedge x \leq 2\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid x = 2-y \wedge x \leq 2\}$

$Rec_1(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2-y \leq 2\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y\}$

$\boxed{Rec_1(f) = [0, +\infty[}$

$Rec_2(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 4-2x \wedge x > 2\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid 2x = 4-y \wedge 2x > \}$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid 4-y > 4\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 > y\}$

$\boxed{Rec_2(f) =]-\infty, 0[}$

Luego, $Rec(f) = Rec_1(f) \cup Rec_2(f) =]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$ 6

Así, f es sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva y tiene inversa:

i) $x \leq 2 \longrightarrow y = 2 - x \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{x = 2 - y}$, $\boxed{y \geq 0}$

ii) $x > 2 \longrightarrow y = 4 - 2x \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{x = 2 - \frac{y}{2}}$, $\boxed{y < 0}$

Así, $\boxed{f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ 2 - \frac{x}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

---

5) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Sea $f: \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Demostrar que si f es inyectiva, entonces $ad - bc \neq 0$.

<u>Sol:</u> Como f es inyectiva, se sabe que $f(x) = f(y) \longrightarrow x = y$

$$f(x) = f(y) \longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d} \longrightarrow (ax+b)(cy+d) = (ay+b)(cx+d)$$

$$\longrightarrow \cancel{acxy} + bcy + adx + \cancel{bd} = \cancel{acxy} + bcx + ady + \cancel{bd}$$

$$\longrightarrow adx + bcy = ady + bcx \longrightarrow adx - bcx = ady - bcy$$

$$\longrightarrow x(ad - bc) = y(ad - bc)$$

La expresión anterior solo se puede simplificar si $ad - bc \neq 0$.

Como $x = y$, se debe poder simplicar el término $ad - bc$.

Luego, no queda más remedio que $ad - bc \neq 0$.

Resolución Problema Taller

Sea $g : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2-\sqrt{x-1}$

$$f : ([-2,3[\cup]3,6]) \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} x^2-2x-1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Determinar $g \circ f$.

Sol: $\mathrm{Dom}(g\circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$

$$= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid (x^2-2x-1 \in [1,+\infty[\land -2 \leq x < 3) \lor (\tfrac{1}{x-3} \in [1,+\infty[\land 3 < x \leq 6)\}$$

$$= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid (x^2-2x-1 \geq 1 \land -2 \leq x < 3) \lor (\tfrac{1}{x-3} \geq 1 \land 3 < x \leq 6)\}$$

$$= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid (x^2-2x-2 \geq 0 \land -2 \leq x < 3) \lor (x-3 \leq 1 \land 3 < x \leq 6)\}$$

$$= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid ((x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3})) \geq 0 \land -2 \leq x < 3) \lor (x \leq 4 \land 3 < x \leq 6)\}$$

$$= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid ((x \geq 1+\sqrt{3} \land x \geq 1-\sqrt{3}) \lor (x \leq 1+\sqrt{3} \land x \leq 1-\sqrt{3}) \land -2 \leq x < 3) \lor (3 < x \leq 4)\}$$

$$= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid (x \geq 1+\sqrt{3} \lor x \leq 1-\sqrt{3} \land -2 \leq x < 3) \lor (3 < x \leq 4)\}$$

$\sqrt{3} \approx 1{,}73 \quad 1+\sqrt{3} \approx 2{,}73 \quad 1-\sqrt{3} \approx -0{,}73$

$$= \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid -2 \leq x \leq 1-\sqrt{3} \lor 1+\sqrt{3} \leq x < 3 \lor 3 < x \leq 4\}$$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(g\circ f) = [-2, 1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3}, 3[\cup]3,4]}$$

$g\circ f : \mathrm{Dom}(g\circ f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\circ f(x) = g(f(x)) = 2-\sqrt{f(x)-1}$

$$\rightarrow g\circ f(x) = \begin{cases} 2-\sqrt{x^2-2x-1-1} & \text{si } -2 \leq x \leq 1-\sqrt{3} \text{ ó } 1+\sqrt{3} \leq x < 3 \\ 2-\sqrt{\dfrac{1}{x-3}-1} & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{g \circ f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 2} & \text{si } -2 \leq x \leq 1 - \sqrt{3} \text{ ó } 1 + \sqrt{3} \leq x < 3 \\ 2 - \sqrt{\dfrac{4-x}{x-3}} & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}}$$