UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantías 05−A y 05−B

Circunferencia, elipse y sus elementos

Semana del Lunes 21 al Jueves 24 de Abril

1. **Si la ecuación dada representa a una circunferencia, encontrar su centro, su radio y esbozar su gráfico:**

   a) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

   b) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y = 13$

   c) $x^2 + y^2 - 10y + 21 = 0$

Solución:

Como paso previo para la resolución de los ejercicios, cabe hacer notar que la ecuación de la circunferencia de centro (h,k) y radio $r > 0$ será:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Para a):

En este caso vemos que la ecuación de la circunferencia ya está en su forma canónica; luego, **la ecuación** $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ **representa a una circunferencia de centro** $(h,k) = (3,2)$ **y de radio** $r = 1$**.**

Para b):

En primer lugar, vemos que los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales, pero no valen 1; por ello, hace falta multiplicar la ecuación por $(1/2)$ para luego ***completar cuadrados***; es decir:

$$2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y = 13 \quad / \cdot (1/2)$$

$$\longrightarrow \quad x^2 + y^2 - x + 3y - 13/2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad (x^2 - x) + (y^2 + 3y) - 13/2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad (x^2 - x + (1/4)) + (y^2 + 3y + (9/4)) - (1/4) - (9/4) - (13/2) = 0$$

$$\longrightarrow \quad (x - \underbrace{(1/2)}_{h})^2 + (y - \underbrace{(-3/2)}_{k})^2 = \underbrace{9}_{r^2}$$

Luego, **la ecuación** $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y = 13$ **representa a una circunferencia de centro** $(h,k) = (1/2, -3/2)$ **y de radio** $r = 3$**.**

Para c):

$$x^2 + y^2 - 10y + 21 = 0$$

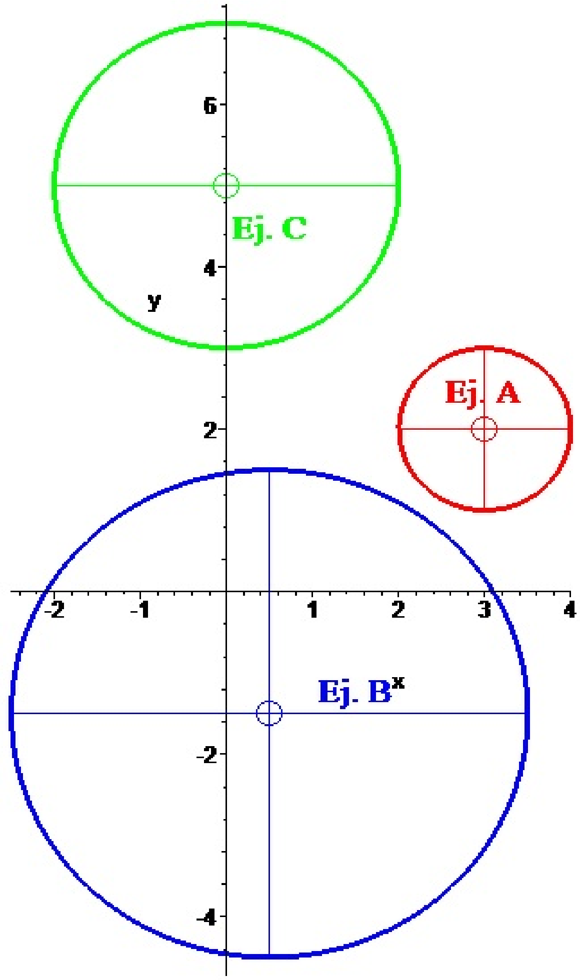
$$\longrightarrow \quad (x-0)^2 + (y^2 - 10y) + 21 = 0$$

$$\longrightarrow \quad (x-0)^2 + (y^2 - 10y + 25) - 25 + 21 = 0$$

$$\longrightarrow \quad (x - \underbrace{(0)}_{h})^2 + (y - \underbrace{(5)}_{k})^2 = \underbrace{4}_{r^2}$$

Luego, **la ecuación $x^2+y^2-10y+21=0$ representa a una circunferencia de centro** $(h,k)=(0,5)$ **y de radio** $r=2$**.**

Los gráficos de las tres circunferencias se pueden ver en la Figura de la derecha $\square$.



2. Si la ecuación dada representa a una elipse, encontrar su centro, sus focos y sus vértices. Además, encontrar las ecuaciones de su eje focal (mayor) y su eje menor, y esbozar su gráfico:

a) $x^2/9 + y^2/4 = 1$

b) $16x^2 + 9y^2 = 16$

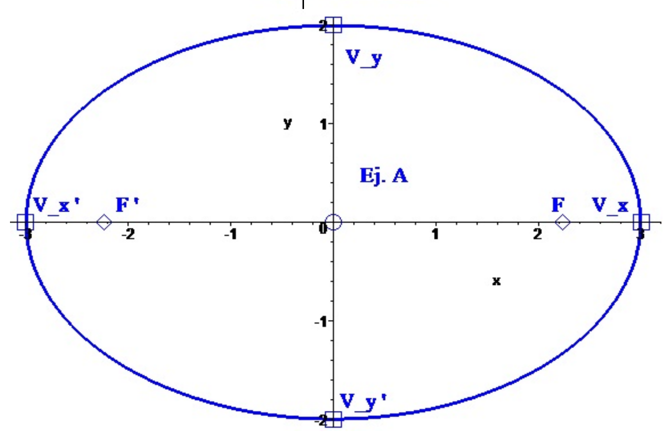
c) $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 34 = 0$

Solución:

Como paso previo para la resolución de los ejercicios, cabe mencionar que la ecuación de la elipse será vista únicamente en su forma principal:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Por ello, para los casos en que la ecuación de la elipse no sea inmediata, inevitablemente debemos ***completar cuadrados***.



Para a):

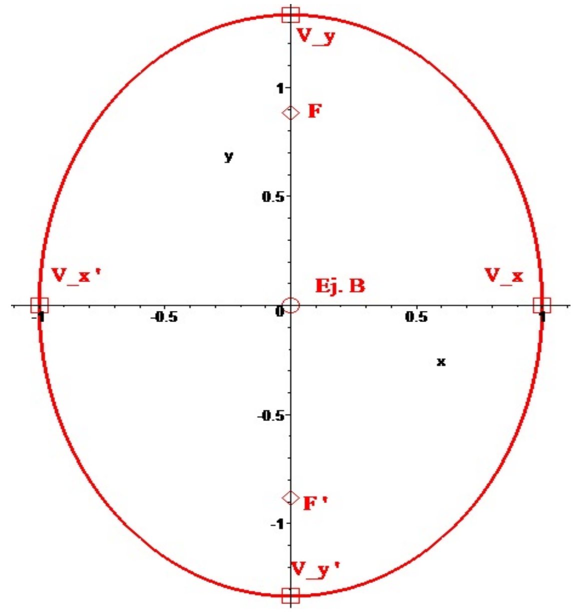
En este caso vemos que la ecuación de la elipse ya está en su forma canónica. Además, tenemos que $h=0$, $k=0$, $a=3$, $b=2$, $\boxed{\ a>b\ }$ (elipse horizontal).

En este caso, como $a>b$, se tiene $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$; luego, $c = \sqrt{5}$ ($\approx$ 2,24).

Con todo lo anterior, se puede concluir que **la ecuación** $x^2/9+y^2/4=1$ **representa a una elipse de centro** $(h,k)=(0,0)$ **con focos** $F=(h+c,k)=(\sqrt{5},0)$ **y** $F'=(h-c,k)=(-\sqrt{5},0)$ **y de vértices** $V_x=(h+a,k)=(3,0)$**,** $V_x'=(h-a,k)=(-3,0)$**,** $V_y=(h,k+b)=(0,2)$ **y** $V_y'=(h,k-b)=(0,-2)$**.**

El gráfico de esta elipse se puede ver en la Figura de color AZUL.

Para b):



En este caso, vemos que el término al lado derecho de la ecuación es distinto de 1; por ello, hace falta multiplicar la ecuación por (1/16); es decir:

$$16x^2 + 9y^2 = 16 \quad / \cdot (1/16)$$

$$\longrightarrow \quad x^2 + (9/16)y^2 = 1$$

$$\longrightarrow \quad \frac{(x-0)^2}{(1)^2} + \frac{(y-0)^2}{(4/3)^2} = 1$$

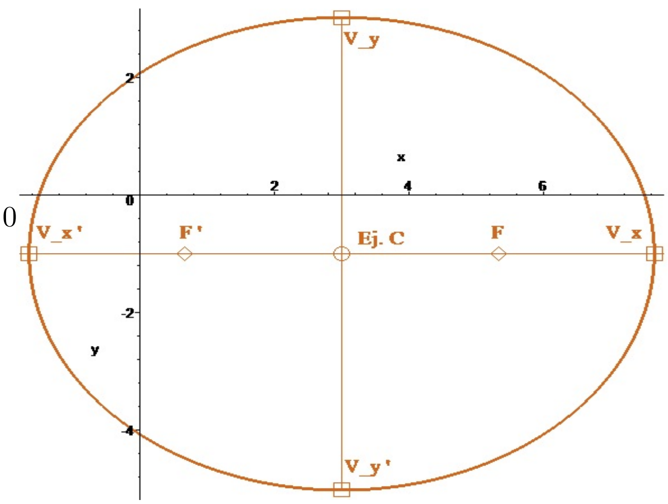
Luego, tenemos que $h = 0$, $k = 0$, $a = 1$, $b = 4/3$, $\boxed{a < b}$ (elipse vertical).

En este caso, como $a < b$, se tiene $c^2 = b^2 - a^2 = (16/9) - (9/9) = 7/9$; luego, $c = \sqrt{7}/3$ ($\approx 0{,}88$).

Con todo lo anterior, se puede concluir que **la ecuación** $16x^2+9y^2 = 16$ **representa a una elipse de centro** $(h,k) = (0,0)$ **con focos** $F = (h, k+c) = (0, \sqrt{7}/3)$ **y** $F' = (h, k-c) = (0, -\sqrt{7}/3)$ **y de vértices** $V_x = (h+a, k) = (1,0)$**,** $V_x' = (h-a, k) = (-1,0)$**,** $V_y = (h, k+b) = (0, 4/3)$ **y** $V_y' = (h, k-b) = (0, -4/3)$**.**

El gráfico de esta elipse se puede ver en la Figura de color ROJO.

Para c):



$$3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 34 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 3(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 2y) - 34 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 3(x^2-6x+9)+4(y^2+2y+1)-(3\cdot 9)-(4\cdot 1)-34 = 0$$

$$\longrightarrow \quad 3(x-3)^2 + 4(y+1)^2 = 65 \quad / \cdot (1/65)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{(65/3)} + \frac{(y-(-1))^2}{(65/4)} = 1$$

Luego, tenemos que $h = 3$, $k = -1$, $a = \sqrt{65/3}$ ($\approx 4{,}65$) , $b = \sqrt{65/4}$ ($\approx 4{,}03$) , $\boxed{a > b}$ (elipse horizontal).

En este caso, como $a > b$, se tiene $c^2 = a^2 - b^2 = (65/3) - (65/4) = 65/12$; luego, $c = \sqrt{65/12}$ ($\approx 2{,}33$).

Con todo lo anterior, se puede concluir que **la ecuación** $3x^2+4y^2-18x+8y-34 = 0$ **representa a una elipse de centro** $(h,k) = (3,-1)$ **con focos** $F = (h+c, k) = (3+\sqrt{65/12}, -1)$ **y** $F' = (h-c, k) = (3-\sqrt{65/12}, -1)$ **y de vértices** $V_x = (h+a, k) = (3+\sqrt{65/3}, -1)$**,** $V_x' = (h-a, k) = (3-\sqrt{65/3}, -1)$**,** $V_y = (h, k+b) = (3, -1+\sqrt{65/4})$ **y** $V_y' = (h, k-b) = (3, -1-\sqrt{65/4})$**.**

El gráfico de esta elipse se puede ver en la Figura de color CAFÉ.

3. Determinar en cada caso la cónica indicada y encontrar sus elementos:

a) Circunferencia de centro $(2, -2)$, tangente a la recta de ecuación $y = x + 4$.

b) Elipse de centro $(1, 2)$, eje mayor horizontal y que pase por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 2)$

Solución: **Para a):**

Primero, recordamos que ***la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia***.

Luego, si llamamos l_1 a la recta tangente y buscamos una recta l_2 que contenga al radio, entonces:

- Esta recta es perpendicular a la recta tangente:

$$\begin{cases} l_1 : \; y &= x + 4 \\ l_2 : \; y &= mx + n \end{cases} \;\rightarrow\; l_1 \perp l_2 \;\rightarrow\; 1 \cdot m = -1 \;\rightarrow\; \boxed{m = -1}$$

- Esta recta pasa por el centro de la circunferencia:

$$(2, -2) \in l_2 \;\rightarrow\; y = -x + n \;\rightarrow\; (-2) = -(2) + n \;\rightarrow\; \boxed{n = 0}$$

Luego, la recta l_2 es $\boxed{y = -x}$.

Ahora es posible encontrar el punto de tangencia (x_t, y_t) como la intersección de l_1 y l_2:

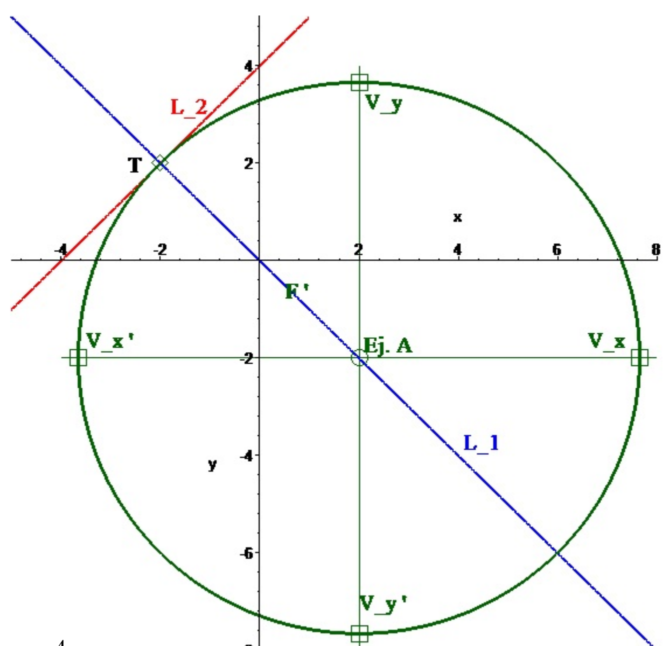
$$\begin{cases} y &= x + 4 \\ y &= -x \end{cases} \;\rightarrow\; x_t + 4 = -x_t \;\rightarrow\; 2x_t = -4 \;\rightarrow\; \boxed{x_t = -2} \;\rightarrow\; y_t = -x_t = \boxed{2 = y}$$

Finalmente, el radio de la circunferencia será la distancia entre el centro $(2, -2)$ y el punto de tangencia $(-2, 2)$:

$$r = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \boxed{4\sqrt{2} = r}$$

Con ello, la circunferencia buscada tiene por ecuación $\boxed{(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 32}$, su centro es $(h, k) = (2, -2)$ y su radio es $r = 4\sqrt{2}$.

El gráfico de esta circunferencia se puede ver en la figura de la derecha.



Para b):

La elipse de centro $(1, 2)$ y eje mayor horizontal tendrá por ecuación $\boxed{(a > b)}$:

$$\frac{(x - 1)^2}{a^2} + \frac{(y - 2)^2}{b^2} = 1$$

Ahora, vemos que $(1, 0)$ y $(3, 2)$ están en la elipse; luego:

$$\cancelto{0}{\frac{(1 - 1)^2}{a^2}} + \frac{(0 - 2)^2}{b^2} = 1 \;\longrightarrow\; \frac{4}{b^2} = 1 \;\longrightarrow\; \boxed{b = 2}$$

$$\frac{(3 - 1)^2}{a^2} + \cancelto{0}{\frac{(2 - 2)^2}{b^2}} = 1 \;\longrightarrow\; \frac{4}{a^2} = 1 \;\longrightarrow\; \boxed{a = 2}$$

Vemos que $a = b = 2$, lo cual contradice que $a > b$. ***¿Qué está ocurriendo en este caso?***

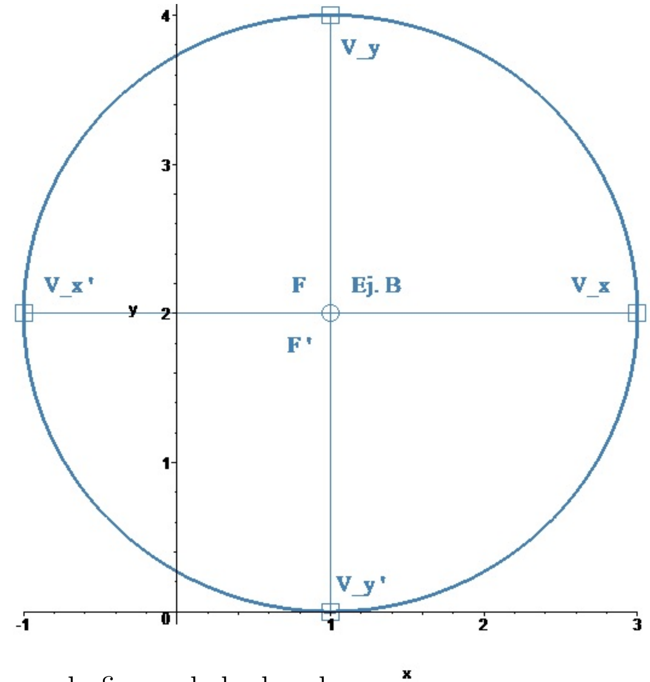
Si ignoramos por un momento la contradicción, vemos que la elipse buscada tiene por ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \rightarrow \boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=4}$$

Luego, diremos que **la elipse degenera en una circunferencia** de centro $(h,k)=(1,2)$ y de radio $r=a=b=2$.

Dado que $a=b$, se tiene que $c^2=a^2-b^2=b^2-a^2=0$; luego, $c=0$. Esto implica que **los focos están (ambos) en el centro de la elipse**; es decir, $F=(h+c,k)=(1,2)$ y $F'=(h-c,k)=(1,2)$.

Finalmente, los vértices de la elipse degenerada son $V_x=(h+a,k)=(3,2)$, $V_x'=(h-a,k)=(-1,2)$, $V_y=(h,k+b)=(1,4)$ y $V_y'=(h,k-b)=(1,0)$.



El gráfico de esta elipse degenerada se puede ver en la figura de la derecha.