UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 03−B

Producto Punto y Ecuaciones de la Recta

Semana del Viernes 04 al Jueves 10 de Abril

1. Para los vectores $\vec{u}$ siguientes, determinar un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ y $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$:

a) $\vec{u} = (3, -4)$

b) $\vec{u} = (\pi, \sqrt{2})$

Solución: Sea $\vec{v} = (x, y)$:

Para a):

- $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad 3x - 4y = 0$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 5 = \|\vec{u}\| \quad \longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 25$

Así, el vector tiene que satisfacer las ecuaciones $\begin{cases} 3x - 4y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 25 \end{cases}$

De la primera ecuación se obtiene $\boxed{x = (4/3)y}$, valor que sustituimos en la segunda ecuación, resultando:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \rightarrow \quad ((4/3)y)^2 + y^2 = 25 \quad \rightarrow \quad (16/9)y^2 + y^2 = 25 \quad \rightarrow \quad (25/9)y^2 = 25$$

$$\rightarrow \quad y^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \pm 3}$$

- $\boxed{y = 3 \quad \longrightarrow \quad x = (4/\cancel{3})(\cancel{3}) \quad \longrightarrow \quad x = 4}$
- $\boxed{y = -3 \quad \longrightarrow \quad x = (4/\cancel{3})(-\cancel{3}) \quad \longrightarrow \quad x = -4}$

Luego, los dos vectores que cumplen lo pedido son $\vec{v_1} = (4, 3)$ y $\vec{v_2} = (-4, -3)$.

Para b):

- $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \pi x + \sqrt{2}y = 0$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\pi)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\pi^2 + 2}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\pi^2 + 2} = \|\vec{u}\| \quad \longrightarrow \quad x^2 + y^2 = \pi^2 + 2$

Así, el vector tiene que satisfacer las ecuaciones $\begin{cases} \pi x + \sqrt{2}y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = \pi^2 + 2 \end{cases}$

De la primera ecuación se obtiene $\boxed{x = \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{\pi}\right) y}$, valor que sustituimos en la segunda ecuación, resultando:

$$x^2+y^2 = \pi^2+2 \quad \to \quad (\left(\frac{-\sqrt{2}}{\pi}\right) y)^2+y^2 = \pi^2+2 \quad \to \quad (2/\pi^2)y^2+y^2 = \pi^2+2 \quad \to \quad \left(\frac{\cancel{2+\pi^2}}{\pi^2}\right) y^2 = \cancel{\pi^2+2}$$

$$\to \quad y^2 = \pi^2 \quad \to \quad \boxed{y = \pm\pi}$$

- $\boxed{y = \pi \quad \longrightarrow \quad x = (\frac{-\sqrt{2}}{\cancel{\pi}})(\cancel{\pi}) \quad \longrightarrow \quad x = -\sqrt{2}}$
- $\boxed{y = -\pi \quad \longrightarrow \quad x = (\frac{-\sqrt{2}}{\cancel{\pi}})(-\cancel{\pi}) \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{2}}$

Luego, los dos vectores que cumplen lo pedido son $\vec{v_1} = (-\sqrt{2}, \pi)$ y $\vec{v_2} = (\sqrt{2}, -\pi)$ $\square$.

2. **Hallar un vector director de la recta cuya ecuación cartesiana es $y = mx+n$. Encontrar su ecuación vectorial y la ecuación vectorial con producto punto. Aplicar lo anterior a la ecuación $y = 3x + 5$.**

Solución: Procediendo como ya se vio en la Ayudantía 02−B, se tiene:

$$(x, y) = (x, mx + n) = (x, mx) + (0, n) = x(1, m) + (0, n)$$

Luego, se tiene $\vec{d} = (1, m)$.
La ecuación vectorial está determinada inmediatamente y es:

$$\vec{x} = (0, n) + \lambda(1, m) \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Para determinar la ecuación con producto punto, primero determinamos el vector $\vec{n}$ perpendicular al vector director de la recta:

$$\boxed{\vec{n} = (x_2, y_2) \quad , \quad \vec{d} = (1, m)} \quad \longrightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{d} \longleftrightarrow \vec{n} \bullet \vec{d} = 0$$

$$\longrightarrow \quad (x_2, y_2) \bullet (1, m) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_2 + my_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y_2 = \frac{-1}{m} x_2}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x_2 = -m \quad , \quad y_2 = 1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{n} = (-m, 1)}$$

Luego determinamos $\vec{n} \bullet \vec{x}$:

$$\vec{n} \bullet \vec{x} \quad = \quad (-m, 1) \bullet (\lambda \ , \ n + m\lambda) \quad = \quad \cancel{-m\lambda} + (n + \cancel{m\lambda}) \quad = \quad \boxed{\vec{n} \bullet \vec{x} = C = n}$$

Aplicando lo anterior a la ecuación $y = 3x + 5$, se obtiene:

- $m = 3\ ,\ n = 5 \quad \longrightarrow \quad \vec{d} = (1,3)\ ,\ \vec{p} = (0,5)$
- Ecuación vectorial: $\vec{x} = (0,5) + \lambda(1,3)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{n} = (-3,1) \quad \longrightarrow \quad \vec{n} \bullet \vec{x} = (-3,1) \bullet \vec{x} = 5$

3. Si $A = (-9/2, 2/3)$ y $B = (6,7)$, escriba la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) **Como producto punto.**
b) **Como ecuación algebraica.**
c) **Como ecuación vectorial.**

Solución: **Para a):**

Usando el razonamiento hecho en los ejercicios anteriores, se tiene:

- $\vec{d} = B - A\ =\ (6 + 9/2\ ,\ 7 - 2/3)\ =\ (21/2, 19/3)$
- $\vec{d} = (a,b) \to \vec{n} = (-b,a) \quad \longrightarrow \quad \vec{n} = (-19/3, 21/2)$
- $\vec{p} = B = (6,7)$

Así, $(\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n}\ =\ \boxed{(\vec{x} - (6,7)) \bullet (-19/3, 21/2) = 0}$

Para b):

Calculando el producto punto obtenido en **a)**, se obtiene de inmediato la ecuación algebraica:

$$((x,y) - (6,7)) \bullet (-19/3, 21/2) = 0 \quad \longrightarrow \quad (x-6, y-7) \bullet (-19/3, 21/2) = 0$$
$$\longrightarrow \quad (x-6)(-19/3) + (y-7)(21/2) = 0 \quad \longrightarrow \quad -(19/3)x + 38 + (21/2)y - 147/2 = 0$$
$$\longrightarrow \quad (21/2)y = (19/3)x - (76/2) + (147/2) \quad \longrightarrow \quad y = (2/21)(19/3)x + (2/21)(71/2)$$
$$\longrightarrow \quad \boxed{y = (38/63)x + (71/21)}$$

Luego, observamos que los puntos pertenecientes a esta recta serán de la forma (x,y); sustituyendo adecuadamente, se obtiene:

$$(x,y)\ =\ \left(x\ ,\ \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}\right)\ =\ \left(x\ ,\ \frac{5}{6}x\right) + \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right)\ =\ x\left(1\ ,\ \frac{5}{6}\right) + \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right)\ =\ \frac{x}{6}(6,5) + \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right)$$

Finalmente, la ecuación vectorial se escribe usando los mismos elementos usados en **a)**:

$$\boxed{\vec{x} = (6,7) + \lambda(21/2, 19/3)\quad ,\quad \lambda \in \mathbb{R}}\quad \square.$$