UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 02−A

Soluciones de un SEL y Vectores

Semana del Viernes 28 de Marzo al Jueves 03 de Abril

Soluciones de un SEL:

1. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tenga:

- Solución única.
- Infinitas soluciones.
- Ninguna solución.

$$\begin{cases} (k-1)x + ky + z &= k \\ -2kx + y - kz &= k^2 \\ x - y + (2k-1)z &= 0 \end{cases}$$

Solución: Obtendremos la forma escalonada de la Matriz Ampliada; es decir:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & k & 1 & k \\ -2k & 1 & -k & k^2 \\ 1 & -1 & 2k-1 & 0 \end{array}\right) \overset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2k-1 & 0 \\ -2k & 1 & -k & k^2 \\ k-1 & k & 1 & k \end{array}\right)$$

- $k = 0$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{f_3+f_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{f_3+f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{\mathrm{rango(A)} = \mathrm{rango(A|B)} = 2 < 3 = n} \longrightarrow \boxed{\textbf{Infinitas soluciones} \text{ si } k = 0}$

- $k \neq 0$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2k-1 & 0 \\ -2k & 1 & -k & k^2 \\ k-1 & k & 1 & k \end{array}\right) f_2 + (2k)f_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2k-1 & 0 \\ 0 & 1-2k & 4k^2-3k & k^2 \\ k-1 & k & 1 & k \end{array}\right)$$

- $k \neq 0$, $k = 1$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)_{f_3+f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$\boxed{\mathrm{rango(A)} = \mathrm{rango(A|B)} = 3 = n} \longrightarrow \boxed{\textbf{Solución única} \text{ si } k = 1}$

- $k \neq 0$, $k \neq 1$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2k-1 & 0 \\ 0 & 1-2k & 4k^2-3k & k^2 \\ k-1 & k & 1 & k \end{array}\right)_{f_3-(k-1)f_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2k-1 & 0 \\ 0 & 1-2k & 4k^2-3k & k^2 \\ 0 & 2k-1 & 3k-2k^2 & k \end{array}\right)$$

- $k \neq 0$, $k \neq 1$, $k = 1/2$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) f_2 \leftrightarrow f_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)_{f_3 + (1/2)f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{rango(A)} = 2 < 3 = \mathrm{rango(A|B)}} \longrightarrow \boxed{\textbf{No tiene solución} \text{ si } k = 1/2}$$

- $k \neq 0$, $k \neq 1$, $k \neq 1/2$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2k-1 & 0 \\ 0 & 1-2k & 4k^2-3k & k^2 \\ 0 & 2k-1 & 3k-2k^2 & k \end{array}\right)_{f_3+f_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2k-1 & 0 \\ 0 & 1-2k & 4k^2-3k & k^2 \\ 0 & 0 & 2k^2 & k^2+k \end{array}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{rango(A)} = \mathrm{rango(A|B)} = 3 = n} \longrightarrow \boxed{\textbf{Solución única} \text{ si } k \neq 0 \ , \ k \neq 1 \ , \ k \neq 1/2}$$

Finalmente, el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tendrá:

- ***Solución única*** Si $k \neq 0$, $k \neq 1/2$.
- ***Infinitas soluciones*** si $k = 0$.
- ***Ninguna solución*** si $k = 1/2$ $\square$.

Vectores

2. **Determinar las coordenadas del vector con punto inicial es $(3, -2)$ y punto final $(1, 1)$. Luego, calcular la norma del vector obtenido.**

Solución: Según lo visto en Cátedra, por definición se tiene que el vector buscado corresponde a $(1, 1) - (3, -2) = (1 - 3, 1 - (-2)) = (-2, 3)$.

Ahora calcularemos su norma:

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad \square.$$

3. **Escriba los siguientes vectores en la forma $\alpha(1, y)$:**

a) $(3/4 \ , \ -1/5)$ *b*) $(a - b \ , \ a^2 - 2ab + b^2)$

Solución: **Para el vector a):**

$$(3/4 \ , \ -1/5) = (3)(1/4 \ , \ -1/15) = (3/4)(1, -4/15)$$

Para el vector b):

$$(a - b \ , \ a^2 - 2ab + b^2) = (a - b \ , \ (a - b)^2) = (a - b)(1, a - b) \quad \square.$$

4. **Determinar la suma y la resta entre los vectores $\sqrt{2}(2,1)$ y $(\sqrt{12},\sqrt{6})$. Luego, calcule la norma de la resta obtenida.**

Solución: **Para la suma:**

$$\sqrt{2}(2,1)+(\sqrt{12},\sqrt{6})=\sqrt{2}(2,1)+\sqrt{2}(\sqrt{6},\sqrt{3})=\sqrt{2}(\ (2,1)+(\sqrt{6},\sqrt{3})\ )=\sqrt{2}(2+\sqrt{6},1+\sqrt{3})$$

Para la resta:

$$\sqrt{2}(2,1)-(\sqrt{12},\sqrt{6})=\sqrt{2}(2,1)-\sqrt{2}(\sqrt{6},\sqrt{3})=\sqrt{2}(\ (2,1)-(\sqrt{6},\sqrt{3})\ )=\sqrt{2}(2-\sqrt{6},1-\sqrt{3})$$

Para la norma de la resta:

$$\parallel \vec{v} \parallel = \|\sqrt{2}(2-\sqrt{6},1-\sqrt{3})\| = \sqrt{2}\|(2-\sqrt{6},1-\sqrt{3})\| = \sqrt{2}\sqrt{(2-\sqrt{6})^2+(1-\sqrt{3})^2}$$

$$\parallel \vec{v} \parallel = \sqrt{2}\sqrt{(4-4\sqrt{6}+6)+(1-2\sqrt{3}+3)} = \sqrt{2}\sqrt{14-4\sqrt{6}-2\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{2(7-2\sqrt{6}-\sqrt{3})}$$

$$\parallel \vec{v} \parallel = 2\sqrt{7-2\sqrt{6}-\sqrt{3}}\ \ \square.$$