UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
MC-140 − Matemáticas I

Ayudantía 01−B

Rango de Matrices y Soluciones de un SEL

Semana del Viernes 21 al Jueves 27 de Marzo

Rango de una Matriz:

1. Dadas las siguientes matrices: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Determine el rango de cada una de ellas.

Solución: **Para la matriz** A**:** $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} f_2 - (1/4) f_1 \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vemos que la forma escalonada de A tiene 2 pivotes; luego, se concluye que $\boxed{\text{rango}(\mathrm{A}) = 2}$.

Para la matriz B**:** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1/4) f_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_3 - 14 f_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos que la forma escalonada de B tiene 3 pivotes; luego, se concluye que $\boxed{\text{rango}(\mathrm{B}) = 3}$.

Para la matriz C**:** Vemos que esta matriz ya está en su forma escalonada y que ésta tiene 3 pivotes; luego, se concluye que $\boxed{\text{rango}(\mathrm{C}) = 3}$ $\square$.

Soluciones de un SEL:

2. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tenga:

- Solución única.
- Infinitas soluciones.
- Ninguna solución.

$$\begin{cases} 3x - 4y &= 3 \\ 6x + 8y &= k \end{cases}$$

Solución: Aquí basta con la forma escalonada de la Matriz Ampliada y no la forma escalonada reducida, ya que basta con rango(A), rango(A|B) y el número de **incógnitas** n (las matrices son de m filas y n columnas). Resolviendo según lo anterior, se tiene: $\boxed{\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 3 \\ 6 & 8 & k \end{array}\right) \quad n = 2}$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 3 \\ 6 & 8 & k \end{array}\right) f_2 - 2 f_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 3 \\ 0 & 16 & (k-6) \end{array}\right)$$

Vemos que $\boxed{\text{rango}(\mathrm{A}) = \text{rango}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 2 = n}$; luego, **el sistema tendrá solución única**.

Vemos además que lo anterior es verdadero sin importar el valor de $k \in \mathbb{R}$, por lo que se concluye que **el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tendrá solución única para todo** $k \in \mathbb{R}$ $\square$.

3. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tenga:

- Solución única.
- Infinitas soluciones.
- Ninguna solución.

$$\begin{cases} x + (1-k)z &= 1 \\ x + y + z + w &= 1 \\ -y + kz - w &= 1 \end{cases}$$

Solución: Obtendremos la forma escalonada de la Matriz Ampliada; es decir:

$$\boxed{\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (1-k) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k & -1 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & (1-k) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad n = 3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1-k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k & -1 & 1 \end{array}\right) f_2 - f_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & -1 & 1 \end{array}\right)_{f_3 + f_2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora debemos ver lo que ocurre cuando el "candidato a pivote" es nulo y cuando no lo es:

- $\boxed{2k = 0 \quad \longrightarrow \quad k = 0}$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vemos que $\boxed{\text{rango(A)} = 2 < 3 = \text{rango(A|B)}}$; luego, **el sistema no tendrá solución si** $k = 0$.

- $\boxed{2k \neq 0 \quad \longrightarrow \quad k \neq 0}$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 & 1 \end{array}\right)_{(1/(2k))f_3} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2k \end{array}\right)$$

Vemos que $\boxed{\text{rango(A)} = \text{rango(A|B)} = 3 < 4 = n}$; luego, **el sistema tendrá infinitas soluciones si** $k \neq 0$.

Finalmente, el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tendrá:

- ***Solución única*** en ningún caso.
- ***Infinitas soluciones*** si $k \neq 0$.
- ***Ninguna solución*** si $k = 0$ $\square$.

4. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tenga:

- Solución única.
- Infinitas soluciones.
- Ninguna solución.

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ x + 3y + z & = 0 \\ -x + y + kz & = 2 \\ x + y & = 0 \end{cases}$$

Solución: Obtendremos la forma escalonada de la Matriz Ampliada; es decir:

$$\boxed{\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad n = 3}$$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 + f_1 \\ f_4 - f_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & k & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ f_3 - 3f_2 \\ f_4 + f_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) f_3 \leftrightarrow f_4$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & k-3 & 6 \end{array}\right)$$

Ahora debemos ver lo que ocurre cuando lo que está bajo el pivote es nulo y cuando no lo es:

- $\boxed{k - 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad k = 3}$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Vemos que $\boxed{\text{rango}(\mathrm{A}) = 3 < 4 = \text{rango}(\mathrm{A}|\mathrm{B})}$; luego, **el sistema no tendrá solución si** $k = 3$.

- $\boxed{k - 3 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad k \neq 3}$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & k-3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ f_4 - (k-3)f_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{array}\right)$$

- $\boxed{2k = 0 \quad \longrightarrow \quad k = 0}$

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que $\boxed{\text{rango}(\mathrm{A}) = \text{rango}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 3 = n}$; luego, **el sistema tendrá solución única si** $k = 0$.

- $\boxed{2k \neq 0 \quad \longrightarrow \quad k \neq 0}$

$$(\mathrm{A|B}) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{array}\right)$$

Vemos que $\boxed{\text{rango(A)} = 3 < 4 = \text{rango(A|B)}}$; luego, **el sistema no tendrá solución si** $k \neq 0$.

Finalmente, el Sistema de Ecuaciones Lineales dado tendrá:

- ***Solución única*** si $k = 0$.
- ***Infinitas soluciones*** en ningún caso.
- ***Ninguna solución*** si $k \neq 0$ $\square$.