EJERCICIOS HILBERT

1 Preguía 2

1.1

Sean a, x dos puntos de un espacio de Hilbert, tales que $x \notin \bar{B}(a; r)$ (es decir $\| x - a \| > r > 0$).

Que papel tiene el punto $p(x) := a + r\frac{x-a}{\|x-a\|}$?

1.2

La ortogonalidad es una relación simétrica, No es ni reflexiva, ni transitiva si ....

1.3

Calcule el complemento ortogonal del subespacio c_0 de l^2.

1.4

Sean x, y elementos del espacio E con producto escalar.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $x \perp y$ si y solo si $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces
   - $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ si y solo si $\| x + iy \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$.
   - $x \perp y$ si y solo si $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ y $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$.

1.5

Sean M, N dos subespacios cerrados del espacio de Hilbert E.

Muestre que $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$ y $(M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}$.

1.6

Sean X, Y dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se supone que $\dim X < \infty$ y $\dim X < \dim Y$.

Muestre que $X^\perp \cap Y \neq \{0\}$.

1.7

Sea $X = \mathbb{R}^4$ con base canónica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $B : X \times X \to \mathbb{R}$ la forma bilineal cuya matriz respecto a esa base es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Pruebe que B no es un producto interno.
- Encuentre un subespacio Y tal que $Y \cap Y^\perp = Y$ (donde $Y^\perp := \{x \in X \mid B(x,y) = 0\,,\ \forall\, y \in Y\}$).

1.8

Sea $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal del espacio de Hilbert E y $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de escalares.

- $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j$ converge si y solo si $\sum_{j=1}^\infty |\alpha_j|^2 < \infty$.
- Se tiene $\| \sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j \|^2 = \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j|^2$.
- Si $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j$ converge, la convergencia es independiente de la orden de los términos.

1.9

Sea A un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert E.

Para cada $x \in E$ hay una familia numerable a lo mas de elementos y tales que $\langle x, y\rangle \neq 0$.

1.10

Sea el espacio $C([-1,1])$ con producto escalar $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}$.

- Muestre que no es un espacio de Hilbert.
- Calcule el ortogonal del subespacio vectorial $M := \{f \in C([-1,1]) \mid f(t) = 0\,,\ \forall\, x < 0\}$.
- Muestre que $M \oplus M^\perp$ es diferente de $C([-1,1])$.

1.11

Encontrar una base ortonormal en l^2.

1.12

Un espacio de Hilbert es separable (como espacio métrico) si y solo si tiene una base ortonormal a lo mas numerable.

1.13

Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de vectores de H que cumple $\sum_n \| x_n - e_n \|^2 < 1$. Muestre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genera un subespacio denso de $\mathcal{H}$.

1.14

En el espacio de Hilbert l^2 se considera el conjunto $A := \{e_n \mid n = 1, 3, 5, \dots\}$, donde $e_n(j) := \delta_{n,j}$.

Muestre que A no es una base ortonormal de l^2.