Semestre Primavera 2012
Licenciatura Ciencias exactas

Algebra Lineal

Guía 1

1. Suponga que el cuerpo de escalares de un espacio vectorial es el conjunto de los números complejos. ¿Podemos decir que el conjunto de los vectores también es un espacio vectorial sobre los números reales? ¿y sobre los números racionales? ¿y sobre los enteros módulo 2?

2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del espacio dado?

   a) El conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $X = \{(x, y, z)|z = 3x, x = 2y\}$;
   b) El conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$ tal que $Y = \{(x, y, z)|xy = 0\}$;
   c) El conjunto $Z \subset M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ formado por las matrices que tienen dos columnas iguales;
   d) El conjunto $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tal que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}|f(x+1) = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\}$;
   e) El conjunto $L \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $L = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|x_i = ix_1\}$;
   f) El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^5$ que tienen dos o más coordenadas nulas. El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^3$ que tienen por lo menos una coordenada mayor o igual a 0;
   g) El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son los n primeros términos de una progresión aritmética;
   h) Los vectores en $\mathbb{R}^n$ cuyas primeras k coordenadas son iguales;
   i) Los vectores en $\mathbb{R}^n$ que tienen k coordenadas iguales.

3. Defina los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

   a) $V_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha+\beta)|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;
   b) $V_2 = \{(\alpha, \alpha, 2\alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$;
   c) $V_3 = \{x \in \mathbb{R}^3|x(1) + x(2) - x(3) = 0\}$;
   d) $V_4 = \{(0, \alpha, \alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$;
   e) $V_5 = \{x \in \mathbb{R}^3|x(2) = x(3)\}$;
   f) $V_6 = V_3 \cap V_5$.

   Determine las relaciones de contención para cada par de espacios V_i, V_j de la lista anterior. Es decir dados V_i y V_j , determine si $V_i \subseteq V_j$.

4. Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$,

   $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0, 3y + z = 0\} \text{ y } W = \{(-t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

   Encuentre a, b y c reales tales que $V + W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.

5. Sean W_1, W_2, W_3 subespacios de un espacio vectorial V.

   Demuestre que:
$$W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3).$$

6. Investigue en la literarura (puede ser incluso wikipedia) qué es una matriz tirangular superior y qué es una matriz triangular inferior. Sea $V = M_{n,n}(\mathcal{K})$ el espacio de martices cuadradas n por n con coeficientes en $\mathcal{K}$. Sea W_1 el conjunto de matrices traingulares superiores y W_2 el espacio de matrices triangulares inferiores. Muestre que $V = W_1 + W_2$ pero es falso que $W_1 \oplus W_2$.

7. Sean W_1, W_2, W_3 subespacios de un espacio vectorial V.

   Demuestre que:
$$(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_3).$$

8. Sea $V = \mathbb{R}^3$, sean $W_1 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, y $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Demostrar que $V = W_1 + W_2$.

9. Sea $E = F_1 \oplus F_2 = G_1 \oplus G_2$. Si $F_1 \subseteq G_1$ y $F_2 \subseteq G_2$, pruebe que $F_1 = G_1$ y $F_2 = G_2$.

10. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$. Sea Q_n el conjunto de los polinomios que son divisibles por x^n. Demuestre que Q_n es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}$ y encuentre otro subespacio vectorial $F \subseteq \mathcal{P}$ tal que $F + Q_n = \mathcal{P}$ y $F \cap Q_n = \{0\}$.

11. ¿Es el vector $(1, -2, 5)$ combinación lineal de $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$?

12. Dados los siguentes conjuntos de vectores determine si son L.I o no. Si lo son demuestrelo y si no escriba uno de ellos como combinacin lineal de los otros:
    (a) $\{(3, 4), (1, -3)\}$; (b) $\{(4, 3, 2), (2, -6, 7)\}$;
    (c) $\{(-4, 6, -2), (2, -3, 1)\}$; (d) $\{(6, 2, 3, 4), (0, 5, -3, 1), (0, 0, 7, 2)\}$.

13. Encuentre los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que $\{(2, k-1), (3, 7)\}$ es linealmente independiente.

14. Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. Diga qué vectores de $\mathbb{C}^3$ pueden ser escritos como combinación lineal de $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$, y $(1, 1, 1)$.

15. Verifique si el conjunto $\mathbf{C}$ es linealmente dependiente o no. Determine el espacio que genera.

    $\mathbf{C} = \{\vec{w}_1 = (0, 4, 6), \vec{w}_2 = (-1, 6, 10), \vec{w}_3 = (0, 8, 13)\}$

16. Verifique que los conjuntos

    $\mathbf{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \vec{v}_2 = (-1, 2, 3), \vec{v}_3 = (0, 4, 7)\}$ y

    $\mathbf{C} = \{\vec{w}_1 = (0, 4, 6), \vec{w}_2 = (-1, 6, 10), \vec{w}_3 = (0, 8, 13)\}$

    son bases de $\mathbf{R}^3$.

    ¿Puede escribir una nueva base de $\mathbf{R}^3$ que contenga dos vectores de $\mathbf{B}$ y uno de $\mathbf{C}$. Justificar?. ¿Existe alguna secuencia de operaciones elementales que permita ir del conjunto $\mathbf{B}$ al conjunto $\mathbf{C}$, y del $\mathbf{C}$ al $\mathbf{B}$?

17. Considere los siguentes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$. $V = \{(\alpha+3\beta, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(\gamma-\delta, 2\gamma, -\gamma, -2\delta) | \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$.

    a) Demuestre que V y W son subespacios de $\mathbb{R}^4$.

    b) Encuentre los espacios $V \cap W$ y $V + W$.

18. Sea V el conjunto de las matrices 3 por 3 de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

    donde α y β recorren los numeros reales.

    a) Demuestre que V es subespacio de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

    b) Encuentre al menos dos conjuntos distintos de generadores para V.

19. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V. Decida si los siguientes conjuntos son o no base de V. Justifique sus afirmaciones.

    a) $\{0, v_1, \dots, v_n\}$;

    b) $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$,donde v_{n+1} es un vector cualquiera;

    c) $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$;

    d) $\{-v_1, v_2, \dots, v_n\}$;

    e) $\{v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n\}$ donde λ es un numero real cualquiera;

    f) $\{v_1, v_1+v_2, v_3, ..., v_n\}$.

20. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ defina el conjunto $B_\alpha = \{(1+\alpha, 1-\alpha, 1), (\alpha, 1, 1+\alpha), (1, \alpha-1, \alpha)\}$. ¿Para qué valores de α es B_α una base de $\mathbb{R}^3$?

21. Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ definamos el conjunto $V_A = \{M \in M_{n,m}(\mathbb{R}) | AM = 0\}$, donde cero es la matriz de n por n ceros.

    a) Demuestre que V_A es subespacio de $M_{n\times n}(R)$.

    b) Encuentre una base de V_A si $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

    c) Encuentre una base de V_A si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    d) Determine el espacio V_A si A es invertible, es decir existe $A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

22. Considere el conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,2,4)$ y $v_3 = (0,1,0)$. Demuestre que B es una base de R^3. Dado el vector $w = (1,0,0)$ encuentre el coeficiente de v_2 en la expanción de w como combinación lineal de B.

23. Sean S y T subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Suponga $S \subseteq T$ y $dimS = dimT$. Demuestre que $S = T$.

24. Sean S y T dos subespacios de un espacio finito dimensional V. Demuestre que $dim(S \cap T) \leq \min\{dim(S), dim(T)\}$. Demuestre que la igualdad se cumple si y sólo si $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$. Indicación use el ejercicio anterior.

25. Sean $S = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$, $T = \langle (2,3,1), (1,3,2) \rangle$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $S = T$.

26. Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga los vectores $(1,1,0)$ y $(2,3,1)$.

27. Sea $S = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ y $T = \langle (0,1,2), (2,1,3) \rangle$ en $\mathbb{R}^3$. Encuentre base para $S \cap T$ y $S + T$.

28. Para toda matriz 2 por 2 con coefifcientes complejos definimos

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_3} \\ \overline{z_2} & \overline{z_4} \end{pmatrix}$$

Defina el conjunto $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}$.

  a) Demuestre que $\begin{pmatrix} i & -1+i \\ 1+i & 2i \end{pmatrix} \in V$.

  b) Demuestre que V es un $\mathbb{R}$ subsespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ pero no es un $\mathbb{C}$ subsespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

  c) Encuentre $Dim_{\mathbb{R}}(V)$.

29. a) Demuestre que $\mathbb{C}^2$ es un espacio vectorial real de dimensión 4.

  b) Demuestre que $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial real de dimesnsión $2n$.

  c) Demuestre que si V es un espacio vectorial real de dimensión n, entonces V es un espacio vectorial real de dimensión $2n$.

30. Encuentre la matriz de coordenadas de $(2,1) \in \mathbb{C}^2$ en la base ordenada

$$((i,1), (-1, 1+i)).$$

31. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a 2. Encuentre una base del subespacio $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(2) = 0\}$.

32. Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} \text{ y } W = span((-2, 1, -3), (1, 1, 2)).$$

Encuentre una base de $W + V$.

33. Encuentre las matrices de cambio de base entre las bases ordenadas
$C = \Big((1, 1), (1, -1)\Big)$ y $B = \Big((2, 1), (3, 4)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$

34. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a 3. Encuentre una base del subespacio $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(x) = p(-x)\}$.