

Cálculo y representación gráfica de sumas finitas mediante `gnuplot`

Carlos Esparza-Barrera*

Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile
Casilla 307, Santiago 2, Chile

Gonzalo Gutiérrez**

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile
Casilla 653, Santiago, Chile

1 de agosto de 2008

Resumen

En el congreso anterior de la SOCHEDI presentamos el cálculo de momentos de inercia de cuerpos sólidos sumando las contribuciones de los momentos de inercia parciales correspondientes a la discretización realizada [1]. Para ello se utilizaron las conocidas fórmulas para la suma de potencias enteras de números naturales. Aquí, sin utilizar las expresiones para las sumas de potencias, sino que mediante sencillos guiones de comandos para el programa `gnuplot`, presentamos el cálculo numérico directo de las sumas involucradas y su visualización gráfica simultánea en el monitor del computador. Además de ser una manera de cálculo alternativa a la anterior, la visualización gráfica permite apreciar el ritmo de convergencia del resultado obtenido a medida que el número de elementos de la partición aumenta.

Palabras clave: `gnuplot`, *scripts*, análisis gráfico, GNU/Linux, *software* libre, momento de inercia, sólido rígido.

Actas XXII Congreso de la Sociedad Chilena de Educación en
Ingeniería, SOCHEDI, La Serena, pág. 95, (2008).

* e-mail: cesparza@lauca.usach.cl

** e-mail: gonzalo@fisica.ciencias.uchile.cl

Introducción

La visualización gráfica de datos numéricos o funciones matemáticas es una herramienta potente tanto en el aprendizaje de las ciencias como en su enseñanza. Y, por lo tanto, son útiles a estudiantes y profesores. Brindar tales posibilidades a estudiantes desde el comienzo de su formación profesional da lugar a significativos avances en su aprendizaje y comprensión de los temas estudiados.

Como físicos o ingenieros aprendemos modelando situaciones que muchas veces requieren uso intensivo de cómputo para generar la información numérica. Información que luego debe ser analizada para comprender la respuesta que brinda el modelo. Se necesita *software* para realizar tanto los procedimientos numéricos como las representaciones gráficas. Por su parte, la existencia de *software* de uso libre, que no requiere pagar licencia, unida a las permanentes limitaciones presupuestarias que afectan a los departamentos de ciencias, escuelas, etc. constituyen una invitación a la utilización de *software* de uso gratis.

El programa **gnuplot** [2] genera figuras y gráficos de alta calidad a partir de datos y/o funciones. Es muy estable, maduro, con mantención permanente y muy modesto en el consumo de recursos computacionales. Permite trabajar interactivamente con instrucciones en *línea de comandos* y está disponible para las plataformas de uso corriente: Linux/Unix, Mac OS X y MS Windows. Su potencialidad es tal que conocidos programas computacionales lo usan para producir sus gráficos. A modo de ejemplo, entre otros, **Octave**, un lenguaje para cálculo numérico de alto nivel y gran compatibilidad con **Matlab**, y **Maxima**, un programa para computación simbólica, mediante una interfaz gráfica utilizan **gnuplot** para producir sus gráficos.

El programa **gnuplot** es altamente personalizable mediante guiones de comandos, conocidos como *scripts*, que se almacenan en un archivo que luego carga y ejecuta, generando resultados inmediatos en pantalla o exportando archivos gráficos en una variedad de formatos. Si tiempo después de originalmente generado, el usuario desea repetir el gráfico modificando un aspecto de él, edita el guión y realiza la modificación deseada; se ejecuta y se obtiene el gráfico actual.

La clave para utilizar eficazmente **gnuplot** es comprender su vocabulario; no requiere conocimientos de programación, es suficiente conocimientos de matemáticas básicas. Se trata de un programa cuya utilización es muy intuitiva. Existen en Internet muchos tutoriales con guiones demostrativos [2, 3, 4, 5, 6] que muestran su potencialidad. Un rápido vistazo a los ejemplos suele ser suficiente ayuda para aprender el uso de sus comandos.

En un trabajo presentado al XXI Congreso Chileno de Educación en Ingeniería [1], se calcularon los momentos de inercia para tres cuerpos sólidos mediante sumas finitas de los momentos de inercia parciales de los elementos correspondientes a la discretización realizada de cada cuerpo. Los sistemas considerados fueron: una barra, un disco y una esfera; cada uno de ellos con densidad uniforme de masa. El momento de inercia se determinó utilizando los resultados conocidos para la suma de potencias enteras de números naturales.

En el presente trabajo se muestra el mismo proceso de suma finita para el cálculo del momento de inercia, pero ahora se hace mediante un algoritmo para **gnuplot**, *script*, que realiza la suma numérica y muestra gráficamente el resultado de ella de acuerdo al número de términos,

N , considerados. La visualización permite apreciar de manera muy clara y directa el ritmo de convergencia de la serie al aumentar el número de elementos considerados en la discretización.

Para proceder se construye una función adimensional $f(N)$ haciendo el cociente entre el momento de inercia aproximado con la partición de N elementos sin sumar y el valor exacto de él, que es conocido en los casos considerados. Es decir

$$f(N) = \frac{I_N}{I_{\text{exacto}}} \quad (1)$$

Del proceso de límite de la partición, esperamos que cuando $N \rightarrow \infty$ la partición reproduzca al sólido continuo, de manera que $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = I_{\text{exacto}}$.

El guión de comandos de **gnuplot** calcula la suma correspondiente a $f(N)$ para $N = 1, 2, 3, \dots$ y despliega cada valor en la pantalla, allí se puede apreciar como la aproximación I_N tiende al valor exacto del momento de inercia en la medida que $f(N) \rightarrow 1$ cuando N crece.

Para focalizar la atención del lector respecto de los antecedentes de este trabajo y darle a este artículo un sentido de unidad, en cada una de las tres secciones siguientes se rehace sucintamente el cálculo de los momentos de inercia de la barra, disco y bola esférica, cuyo detalle aparece en [1] y se presentan los guiones de comandos que generan los archivos gráficos en formato **eps** de cada una de las tres funciones $f(N)$ incluidas en este documento. Además se indica la manera de direccionar inmediatamente al monitor del computador la representación gráfica correspondiente.

1. Barra delgada

Para determinar el momento de inercia de una barra delgada y uniforme alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por uno de sus extremos, en [1] se modeló la barra de masa M y largo L con una secuencia de N segmentos, cada uno de longitud a y masa m , tal que $L = Na$ y $M = Nm$, como se muestra en Fig. 1.

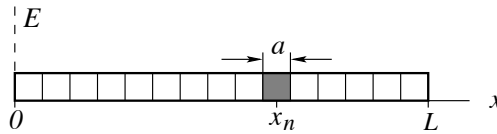


Figura 1: Modelo para la barra.

El n -ésimo segmento de la secuencia está centrado en

$$x_n = a\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

Suponiendo que la masa m de cada segmento está localizada en su centro geométrico, el momento de inercia del n -ésimo segmento de la barra en torno al eje E por su extremo

izquierdo está dado por

$$I_n = mx_n^2 \quad (3)$$

De la suma de los N momentos de inercia I_n resulta el momento de inercia total de la barra en la aproximación considerada. Sustituyendo x_n de Ec. (2) en Ec. (3) se tiene que el momento de inercia alrededor del eje E es

$$I_N = \sum_{n=1}^N I_n = ma^2 \sum_{n=1}^N \left(n^2 - n + \frac{1}{4} \right) = ma^2 \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (4)$$

En la referencia [1] se evaluó I_N utilizando la segunda sumatoria de Ec. (4) considerando los resultados conocidos para $\sum 1$, $\sum n$ y $\sum n^2$; ver Ecs. (4) y (5) en [1]. En este trabajo, para realizar la suma gráficamente utilizaremos la expresión de la derecha en Ec. (4). De acuerdo a la discretización $M = Nm$ y $L = Na$, y del hecho que el momento de inercia exacto de la barra es $I_{\text{exacto}} = ML^2/3$, la función adimensional $f(N)$ resulta

$$f(N) = \frac{I_N}{I_{\text{exacto}}} = \frac{3}{N^3} \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (5)$$

Observemos que $f(N)$ depende exclusivamente de N y no de los detalles definidos por a y m en la partición realizada.

La representación gráfica de Ec. (5) la hace **gnuplot**¹ definiendo el dominio de la variable independiente de 1 a N y tomando justamente los N puntos para graficar; la suma se realiza utilizando el operador ternario **e1 ? e2 : e3**. A la izquierda de Fig. 2, se muestra el guión de comandos que genera el archivo **fn-barra.eps** insertado a la derecha de la misma figura. La salida directa a pantalla requiere definir el terminal **x11** quitando el símbolo de comentario, **#**, en la línea número 1 y comentando las líneas 2 y 3.

```
#set terminal x11
set terminal postscript enhanced
set output "fn-barra.eps"
N=11
set xlabel "N"
set ylabel "f(N)"
set xrange [1:N]
set yrange [0.6:1.05]
set xtics 1
set ytics (0.6,0.7,0.8,0.9,1.0,1.05)
set samples N # ¡solo los enteros del xrange!
s(x) = x*x -x +0.25
sum_s(x) = s(x) + ((x>1) ? sum_s(x-1) : 0)
f(x) = (3.0/(x**3))*sum_s(x)
plot f(x) notitle w p 7, 1. notitle w l
```

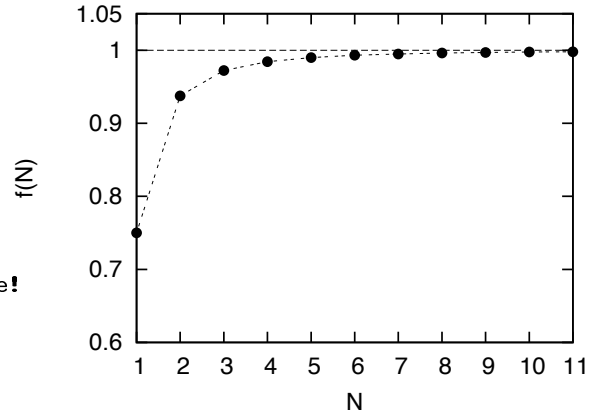


Figura 2: Guión y representación gráfica de $f(N)$ versus N para la barra.

¹Se utilizó **gnuplot**, version 4.0, patchlevel 0 corriendo en Debian Etch 4.0r3.

2. Disco delgado

El segundo ejemplo es el momento de inercia de un disco delgado uniforme de masa M y radio R , alrededor de un eje perpendicular a su plano que pasa por su centro. Se modela el disco mediante N regiones anulares de ancho a , como se muestra en la Fig. 3. El número N lo elegimos de manera que $Na = R$.

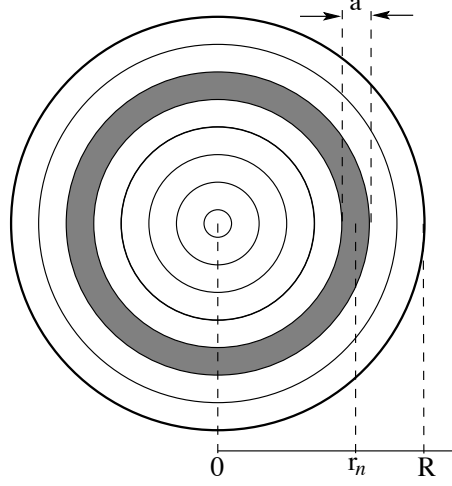


Figura 3: Modelo para el disco.

Suponiendo que la masa de la n -ésima región, m_n , está localizada a distancia $r_n = a(n-1/2)$, del centro del disco; el momento de inercia de la n -ésima región anular está dado por

$$I_n = m_n r_n^2 = 2\pi\sigma a^4 \left(n - \frac{1}{2}\right)^3 = 2\pi\sigma a^4 \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8}\right) \quad (6)$$

El momento de inercia total se obtiene sumando los N momentos individuales I_n .

$$I_N = \sum_{n=1}^N I_n = 2\pi\sigma a^4 \sum_{n=1}^N \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8}\right) = 2\pi\sigma a^4 \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right)^3 \quad (7)$$

En la referencia [1] se calculó I_N desde la segunda sumatoria de Ec. (7). Puesto que $Na = R$ es el radio del disco y $\pi\sigma R^2 = M$ es su masa. En términos del momento de inercia exacto del disco uniforme, $I_{\text{exacto}} = MR^2/2$, de Ec. (7) construimos la función adimensional

$$f(N) = \frac{I_N}{I_{\text{exacto}}} = \frac{4}{N^2} \sum_{n=1}^N (n - 1/2)^3 \quad (8)$$

A la izquierda de Fig. 4 se muestra el guión de comandos que genera el archivo **fn-disco.eps** insertado a la derecha de la misma figura. La salida directa a pantalla requiere descomentar la línea 1 y comentar las dos líneas siguientes.

```

#set terminal x11
set terminal postscript enhanced
set output "fn-disco.eps"
N=11
set xlabel "N"
set ylabel "f(N)"
set xrange [1:N]
set yrange [0.4:1.05]
set xtics 1
set ytics 0.2
set samples N # ;solo los enteros del xrange!
s(x) = (x-0.5)**3
sum_s(x) = s(x) + ((x>1) ? sum_s(x-1) : 0)
f(x) = (4.0/(x**4))*sum_s(x)
plot f(x) notitle w p 7, 1. notitle w l

```

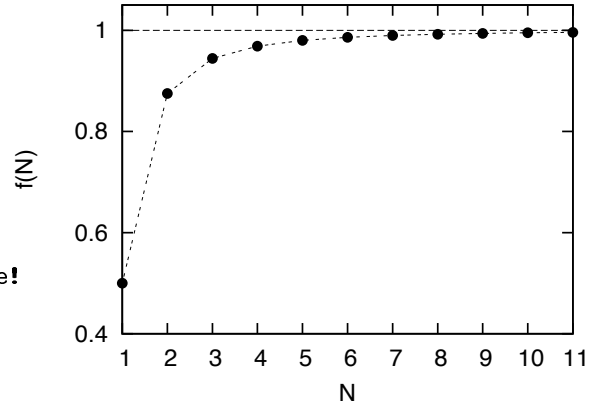


Figura 4: Guión y representación gráfica de $f(N)$ versus N para el disco.

3. Esfera

Para determinar el momento de inercia de una esfera maciza uniforme de masa M y radio R alrededor de un diámetro de ella, se modeló la esfera mediante un conjunto de $2N$ rebanadas, cada una de espesor a y masa m_n tal que $R = Na$. Las $2N$ rebanadas las consideraremos de a pares ubicados simétricamente respecto de un plano ecuatorial perpendicular al eje de rotación. La geometría del modelo para la rotación alrededor del eje x se muestra en Fig. 5 con la rebanada genérica de la mitad derecha de la esfera.

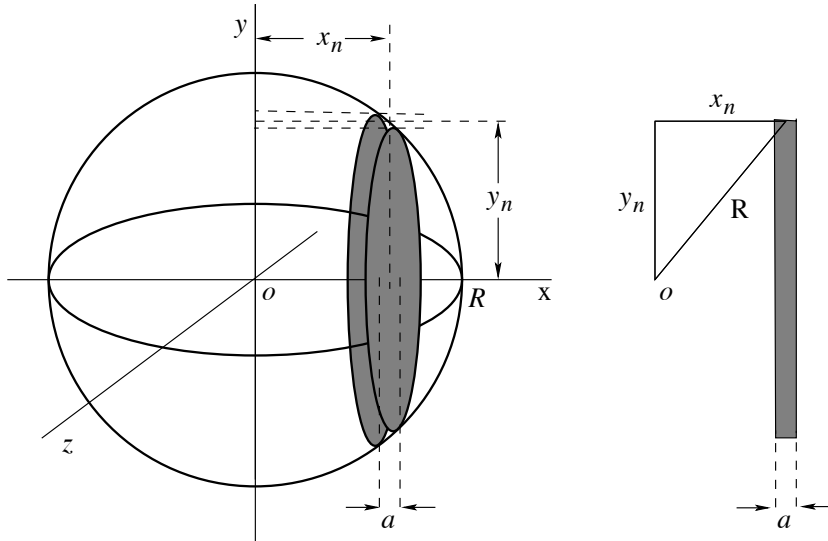


Figura 5: Modelo para la esfera.

La coordenada del centro de la n -ésima rebanada de la mitad derecha de la esfera es $x_n = a(n - 1/2)$. Aproximamos la rebanada de esfera por un cilindro de altura a y radio y_n cuyo volumen es $V_n = \pi a y_n^2$, como se indica en el extremo derecho de la Fig. 5. La masa de la rebanada es

$$m_n = \rho V_n = \rho \pi a y_n^2 \quad (9)$$

El momento de inercia del cilindro de altura a alrededor del eje x , digamos I_n , es

$$I_n = \frac{1}{2} m_n y_n^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a y_n^2 y_n^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a (R^2 - x_n^2)^2 \quad (10)$$

Cada rebanada ubicada en la mitad derecha de la esfera, $x > 0$, tiene otra rebanada ubicada simétricamente en la mitad izquierda de la esfera $x < 0$. Para obtener el momento de inercia de la esfera sumamos sobre las N rebanadas de la mitad derecha y multiplicamos por 2; es decir,

$$I_{2N} = 2 \sum_{n=1}^N I_n = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \rho \pi a (R^2 - x_n^2)^2 \quad (11)$$

En términos de momento de inercia exacto de la esfera, $I_{\text{exacto}} = (2/5)MR^2$, la función $f(N)$ resulta

$$f(N) = \frac{I_N}{I_{\text{exacto}}} = \frac{15}{8} \frac{1}{N^5} \sum_{n=1}^N [N^2 - (n - 1/2)^2]^2 \quad (12)$$

Como en los casos anteriores, la Fig. 6 muestra el guión de comandos que genera el archivo insertado a la derecha de la misma figura. Para salida directa a pantalla se debe descomentar la línea 1 y comentar las líneas 2 y 3.

```
#set terminal x11
set terminal postscript enhanced
set output "fn-esfera.eps"
r=1
N=11
set xlabel "N"
set ylabel "f(N)"
s(p,q)=(p**2-(q-0.5)**2)**2
set xrange [1:N]
set yrange [0.99:1.06]
set xtics 1
set ytics (0.99,1.00,1.02,1.04, 1.06)
sum(r,s)=(s>r) ? 0. : s(r,s)+sum(r,s+1)
sum_s(x) = s(x) + ((x>1) ? sum_s(x-1) : 0)
set samples N # ;solo los enteros del xrange!
f(x)=(15./8.)*sum(x,1)/(x**5)
plot f(x) notitle w p 7, 1. notitle w l
```

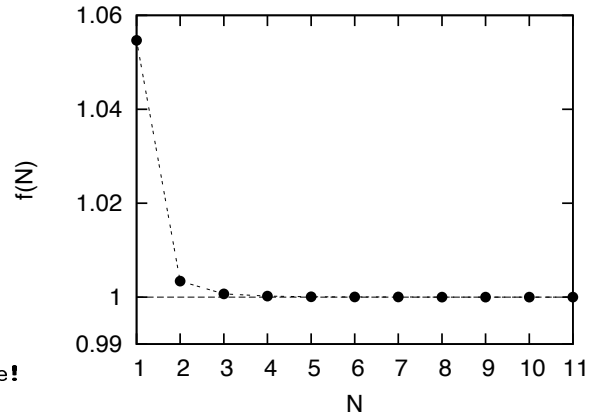


Figura 6: Guión y representación gráfica de $f(N)$ versus N para la esfera.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una manera gráfica alternativa al cálculo algebraico de los momentos de inercia desarrollada en [1]. El procedimiento aquí presentado tiene además el mérito de permitir apreciar gráficamente el ritmo de convergencia de la serie que permite determinar el momento de inercia de interés al ir aumentando la partición considerada en la modelación del sólido. Al mismo tiempo, este procedimiento provee un recurso didáctico que introduce al estudiante a las técnicas de análisis gráfico y constituye un incentivo al uso de *software* de excelente calidad que no requiere del pago de licencia, como es el caso de *gnuplot*.

Por otra parte, en un caso práctico, cuando no se conoce el momento de inercia exacto, se evalúa el momento de inercia aproximado I_N dividido entre la masa del cuerpo; es decir, se construye la función

$$R2(N) = \frac{I_N}{\text{masa del cuerpo}} \quad (13)$$

En este caso, cuando $N \rightarrow \infty$, la función $R2(N)$ converge al cuadrado del radio de giro del sólido con respecto al eje considerado.

Referencias

- [1] Carlos Esparza-Barrera y Gonzalo Gutiérrez, *Cálculo de momentos de inercia mediante sumas finitas*. XXI Congreso Chileno de Educación en Ingeniería, Santiago 2007, Acta de resúmenes pág. 84.
- [2] Es gratis, comparte el código; pero no permite publicar mejoras. Por ello se dice que *gnuplot* no es libre.
- [3] Ron Ho *gnuplot or, How To Make Your Data Look Neat and Shiny*, <http://mos.stanford.edu/papers/Plotting.pdf>
- [4] *gnuplot* Home Page, <http://www.gnuplot.info/>
- [5] *gnuplot* Frequently Asked Questions, <http://www.gnuplot.info/faq/index.html>
- [6] not so Frequently Asked Questions, <http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/index-e.html>.