

Cálculo de momentos de inercia mediante sumas finitas

Carlos Esparza-Barrera*
Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile
Casilla 307, Santiago 2, Chile

Gonzalo Gutiérrez**
Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile
Casilla 653, Santiago, Chile

14 de agosto de 2007

Resumen

Presentamos un método para determinar el momento de inercia de cuerpos sólidos de geometría simple que no utiliza el cálculo integral. El cuerpo sólido se divide en un número finito de elementos, cada uno de los cuales contribuye con su propio momento de inercia al momento de inercia total. El método de discretización propuesto se aplica a una barra rígida uniforme, a un disco uniforme delgado y a una esfera maciza. Los resultados obtenidos se comparan con los valores exactos. El método puede ser extendido para determinar otras cantidades físicas tales como centros de masa y centros de presión.

Palabras clave: cinemática, inercia rotacional, sólido rígido

Actas XXI Congreso de la
Sociedad Chilena de Educación en Ingeniería, SOCHEDI,
Santiago, pág. 84, (2007).

* e-mail: cesparza@lauca.usach.cl

** e-mail: gonzalo@fisica.ciencias.uchile.cl

Introducción

La física de los cuerpos sólidos rígidos es un tema fascinante, pero puede intimidar al estudiante debido a las matemáticas superiores que requiere. Sin embargo, los conceptos en que se basa la descripción del cuerpo rígido son simples. Ellos descansan en la *hipótesis del continuo*; ésto es, modelar un cuerpo rígido con un número infinitamente grande de elementos infinitamente pequeños, mantenidos en su lugar por fuerzas intensas, de manera que la separación de cualquier par de elementos es constante en el tiempo. Por cierto, en el mundo real no existen cuerpos que satisfagan esas condiciones, pero el modelo funciona bien para cuerpos sólidos. De la idea del continuo surgen cantidades físicas que pueden expresarse como una suma sobre elementos discretos. En el proceso de suma usualmente se introduce el concepto de límite y se llega al cálculo integral para evaluar propiedades como momentos de inercia o centros de gravedad.

Para modelar matemáticamente un cuerpo extendido tal como un sólido rígido, nosotros usualmente lo consideramos como un sistema compuesto de un gran número de pequeñas partículas. Esas partículas, de masa elemental Δm_i están muy cerca una de otra. De esa manera, por ejemplo, el momento de inercia rotacional de un sólido alrededor de un eje E , que denotaremos I_E , es

$$I_E = \sum_{i=1}^N r_{Ei}^2 \Delta m_i \quad (1)$$

en que r_{Ei} es la distancia perpendicular desde elemento de masa al eje E . Desde esta definición de momento de inercia, la definición usual $I = \int r^2 dm$ se obtiene tomando el límite en que el número de elementos N tiende a infinito a la vez que la masa Δm_i de cada elemento tiende a cero, satisfaciendo la condición que $\sum_{i=1}^N \Delta m_i$ sea igual a la masa del cuerpo. Sin embargo, con propósitos didácticos es útil disponer de cálculos aproximados de momentos inercia que brinden al estudiante perspicacia de la precisión a que trabajan diferentes aproximaciones [1].

En esta nota presentamos aproximaciones para calcular el momento de inercia de una barra rígida delgada, de un disco delgado y de una esfera maciza. En los tres casos, el cuerpo rígido se modela mediante un número finito de elementos de masa elegidos convenientemente de acuerdo a la geometría del cuerpo. Los resultados obtenidos se comparan con los valores exactos y se determina el error debido a la discretización. Tal como se espera, en el límite cuando el número de elementos tiende a infinito, nuestros resultados reproducen los conocidos momentos de inercia en los tres casos.

1. Barra delgada

Como primer ejemplo, consideremos el momento de inercia de una barra delgada uniforme de masa M y longitud L , que gira en torno a un eje perpendicular en uno de sus extremos. Modelaremos la barra uniforme como una secuencia de N segmentos, cada uno de longitud a y masa m , tal que $L = Na$ y $M = Nm$, como se muestra en Fig. 1.

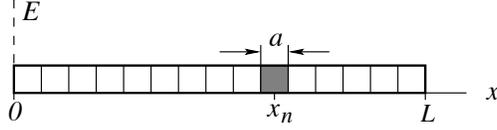


Figura 1: Modelo para la barra.

El n -ésimo segmento de la secuencia está centrado en

$$x_n = a\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

Suponiendo que la masa m de cada segmento está localizada en su centro geométrico, el momento de inercia del n -ésimo segmento de la barra en torno al eje E por su extremo izquierdo está dado por

$$I_n = mx_n^2 \quad (3)$$

De la suma de los N momentos de inercia I_n , resulta el momento de inercia total de la barra en la aproximación considerada. Sustituyendo x_n de Ec. (2) en Ec. (3) y elevando al cuadrado, el momento de inercia de la colección de N segmentos alrededor del eje E es

$$I_N = \sum_{n=1}^N I_n = ma^2 \sum_{n=1}^N \left(n^2 - n + \frac{1}{4}\right) \quad (4)$$

La suma en Ec. (4) se evalúa fácilmente reemplazando $\sum 1$, $\sum n$ y $\sum n^2$ por sus valores (ver Apéndice). Luego de sumar, simplificar y reagrupar, se obtiene,

$$I_N = \frac{Nm}{3}(Na)^2 \left(1 - \frac{1}{4N^2}\right) \quad (5)$$

Observemos que independientemente del número N de segmentos con que se modela la barra, se cumple que $Na = L$ y $Nm = M$. Entonces, escribiendo Ec. (5) en términos de L y M resulta

$$I_N = \frac{M}{3}L^2 \left(1 - \frac{1}{4N^2}\right) \quad (6)$$

El primer factor del lado derecho de Ec. (6) es justamente el momento de inercia exacto de la barra uniforme alrededor de uno de sus extremos [1, 2, 3, 4],

$$I_{\text{Exacto}} = \frac{M}{3}L^2 \quad (7)$$

Por su parte, el segundo factor del lado derecho en Ec. (6) es una función que depende sólo del número N de segmentos utilizado para modelar la barra; escribamos

$$f_{\text{Barra}}(N) = 1 - \frac{1}{4N^2} \quad (8)$$

En términos de I_{Exacto} y $f_{\text{Barra}}(N)$, el momento de inercia de la barra en nuestra aproximación se escribe

$$I_N = I_{\text{Exacto}} f_{\text{Barra}}(N) \quad (9)$$

De Ec. (8) se tiene que $\lim_{N \rightarrow \infty} f_{\text{Barra}}(N) = 1$ y, por lo tanto, de Ec. (9) se verifica que $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = I_{\text{Exacto}}$; es decir, si $N \rightarrow \infty$ el modelo reproduce el resultado exacto.

Notemos que para N finito se cumple que $f_{\text{Barra}}(N) < 1$, de manera que observando la Ec. (9) tenemos que del modelo utilizado para describir la barra se obtiene siempre un momento de inercia que es menor que el valor exacto. El error porcentual en la determinación aproximada del momento de inercia considerando N elementos de masa es,

$$\mathcal{E}_{\text{Barra}}(N) = \frac{|I_{\text{Exacto}} - I_N|}{I_{\text{Exacto}}} 100\% = \frac{25}{N^2}\% \quad (10)$$

De Ec. (10) tenemos que para $N = 1$, es decir, al aproximar la barra por una única masa puntual M localizada en el centro geométrico de ella, se comete un error del 25%; para $N = 2$ el error es aproximadamente del 6%. Por otra parte, de Ec. (10) se tiene que cuando el número de elementos N es muy grande, el error $\mathcal{E}_{\text{Barra}}(N \rightarrow \infty)$ tiende a cero, hecho que brinda otra manera de verificar que, en ese límite, el modelo discreto reproduce el valor exacto del momento de inercia.

2. Disco delgado

El segundo ejemplo que consideraremos es el momento de inercia de un disco delgado uniforme de masa M y radio R alrededor de un eje perpendicular a su plano que pasa por su centro. Modelaremos el disco mediante N regiones anulares de ancho a , como se muestra en la Fig. 2. El número N lo elegimos de manera que $Na = R$.

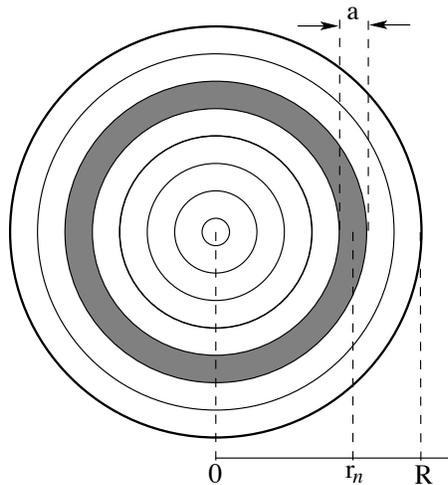


Figura 2: Modelo para el disco.

Introduzcamos el radio medio de la n -ésima región anular

$$r_n = a\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (11)$$

Los radios interno y externo de la n -ésima región anular son

$$r_n - \frac{a}{2} = a(n-1) \quad \text{y} \quad (12)$$

$$r_n + \frac{a}{2} = an, \quad (13)$$

respectivamente.

Observemos que a diferencia con el caso de la barra, aquí la masa de cada región anular es distinta. Entonces, para tener en cuenta este hecho, nosotros introducimos la densidad superficial de masa σ (masa en la unidad de área), y debido a que el disco es uniforme, la masa de cada región es proporcional a su área. La masa m_n de la n -ésima región anular está dada por

$$m_n = \pi\sigma \left[\left(r_n + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(r_n - \frac{a}{2}\right)^2 \right] = 2\pi\sigma ar_n \quad (14)$$

En lo que sigue, supondremos que la masa de la n -ésima región, m_n , está localizada a distancia r_n , dada por Ec. (11), del centro del disco. Entonces, el momento de inercia de la n -ésima región anular está dado por

$$I_n = m_n r_n^2 = 2\pi\sigma a^4 \left(n - \frac{1}{2}\right)^3 = 2\pi\sigma a^4 \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8}\right) \quad (15)$$

El momento de inercia total se obtiene sumando los N momentos individuales I_n . Usando álgebra (ver Apéndice), luego de simplificar, la expresión para el momento de inercia de las N regiones resulta

$$I_N = \sum_{n=1}^N I_n = 2\pi\sigma a^4 \sum_{n=1}^N \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8}\right) = \frac{2\pi\sigma(Na)^4}{4} \left(1 - \frac{1}{2N^2}\right) \quad (16)$$

Notemos que $Na = R$ es el radio del disco y $\pi\sigma R^2 = M$ es su masa. En términos de R y M la Ec. (16) se escribe en la forma

$$I_N = \frac{MR^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2N^2}\right) \quad (17)$$

donde el primer factor, $MR^2/2$, es el momento de inercia exacto de un disco uniforme [1, 2, 3, 4]. Análogamente al caso de la barra, el segundo factor

$$f_{\text{Disco}}(N) = 1 - \frac{1}{2N^2} \quad (18)$$

tiene su origen en la discretización realizada del disco y cumple que $\lim_{N \rightarrow \infty} f_{\text{Disco}}(N) = 0$; de manera que el modelo reproduce el resultado exacto si N tiende a infinito.

Del hecho que para N finito se cumple que $f_{\text{Disco}}(N) < 1$, concluimos que el modelo discreto del disco provee también, como en el caso de la barra, un momento de inercia menor que el valor exacto. En error porcentual de la aproximación es

$$\mathcal{E}_{\text{Disco}}(N) = \frac{|I_{\text{Exacto}} - I_N|}{I_{\text{Exacto}}} 100\% = \frac{50}{N^2}\% \quad (19)$$

Para $N = 1$, es decir, aproximar el disco por un anillo delgado de masa M y radio $R/2$, se obtiene un error del 50%; para $N = 2$ el error es menor del 13%. De Ec. (19) se tiene que $\mathcal{E}_{\text{Disco}}(N \rightarrow \infty)$ tiende a cero, de manera que, en ese límite, verificamos nuevamente que el modelo discreto reproduce el valor exacto del momento de inercia del disco.

3. Esfera

En tercer lugar determinaremos el momento de inercia de una esfera maciza uniforme de masa M y radio R alrededor de un diámetro de ella. Modelaremos la esfera mediante un conjunto de $2N$ rebanadas, cada una de espesor a y masa m_n tal que $R = Na$.

Las $2N$ rebanadas las consideraremos de a pares ubicados simétricamente respecto de un plano ecuatorial perpendicular al eje de rotación. La geometría del modelo se muestra en Fig. 3; consideraremos la rotación alrededor del eje x . La Fig. 3 muestra la rebanada genérica de la mitad derecha de la esfera.

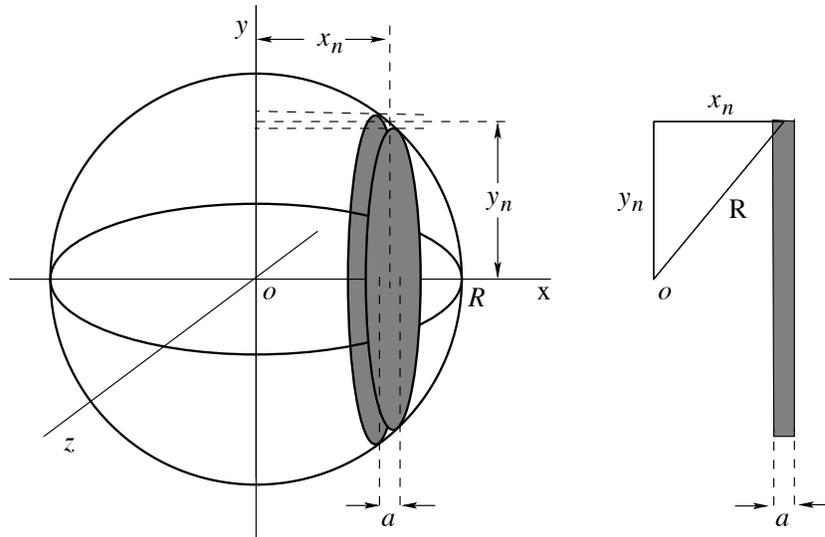


Figura 3: Modelo para la esfera.

La coordenada del centro de la n -ésima rebanada de la mitad derecha de la esfera es

$$x_n = a\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (20)$$

En lo que sigue, aproximaremos la rebanada de esfera por un cilindro de altura a y radio y_n cuyo volumen es $V_n = \pi a y_n^2$, ver detalle en el extremo derecho de la Fig. 3. La masa del cilindro es

$$m_n = \rho V_n = \rho \pi a y_n^2 \quad (21)$$

El teorema de Pitágoras relaciona x_n con y_n y el radio de la bola R a través de la expresión

$$x_n^2 + y_n^2 = R^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (22)$$

El momento de inercia del cilindro alrededor del eje x , digamos I_n , es

$$I_n = \frac{1}{2} m_n y_n^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a y_n^2 y_n^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a (R^2 - x_n^2)^2 \quad (23)$$

Cada elemento de masa ubicado en la mitad derecha de la esfera, $x > 0$, tiene otro elemento de masa ubicado simétricamente en la mitad izquierda de la esfera $x < 0$. La contribución de cada elemento de masa ubicado simétricamente respecto del plano yz es la misma. Por lo anterior, el momento de inercia de la bola, que es la suma de los $2N$ momentos de inercia correspondientes a las N rebanadas de la mitad derecha y las N rebanadas de la mitad izquierda, se realiza multiplicando por 2 la suma de todos los momentos de inercia individuales de la mitad derecha de la bola.

Para generar el momento de inercia de la esfera sumamos sobre las N rebanadas de la mitad derecha y multiplicamos por 2; es decir,

$$I_{2N} = 2 \sum_{n=1}^N I_n = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \rho \pi a (R^2 - x_n^2)^2 \quad (24)$$

Sustituyendo en Ec. (24) la expresión para x_n dada por Ec. (20) y utilizando el hecho que $R = Na$ podemos reescribir la Ec. (24) en una forma adecuada para realizar las sumas como se indica a continuación

$$\frac{I_{2N}}{\rho \pi a^5} = \sum_{n=1}^N \left(N^2 - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^2 \quad (25)$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(N^4 - \frac{N^2}{2} + \frac{1}{16} + \left(2N^2 - \frac{1}{2} \right) n - \left(2N^2 - \frac{3}{2} \right) n^2 - 2n^3 + n^4 \right) \quad (26)$$

$$= \left(N^4 - \frac{N^2}{2} + \frac{1}{16} \right) \sum_{n=1}^N 1 + \left(2N^2 - \frac{1}{2} \right) \sum_{n=1}^N n - \left(2N^2 - \frac{3}{2} \right) \sum_{n=1}^N n^2 - 2 \sum_{n=1}^N n^3 + \sum_{n=1}^N n^4 \quad (27)$$

$$= \frac{8N^5}{15} + \frac{7N}{240} \quad (28)$$

El paso de la expresión dada por Ec. (27) a Ec. (28) se realiza con los resultados del Apéndice.

En definitiva, se tiene que

$$I_{2N} = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \frac{2}{5} R^2 \left(1 + \frac{7}{128} \frac{1}{N^4} \right) \quad (29)$$

Aquí hemos utilizado el hecho que $Na = R$. La masa de la esfera es $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$ y, por otra parte, el momento de inercia exacto de la esfera alrededor de un diámetro es $\frac{2}{5} MR^2$, [1, 2, 3, 4]. Entonces la expresión para I_{2N} de Ec. (29) se escribe

$$I_{2N} = \frac{2}{5} MR^2 \left(1 + \frac{7}{128} \frac{1}{N^4} \right) = I_{\text{Exacto}} \left(1 + \frac{7}{8} \frac{1}{(2N)^4} \right) \quad (30)$$

El factor que acompaña a I_{Exacto} en el lado derecho de Ec. (30) es una función que depende sólo de la partición hecha para aproximar la bola y él tiende a cero si $N \rightarrow \infty$, de manera que en tal límite el modelo reproduce el resultado exacto. Para N finito dicho factor es mayor que la unidad; es decir, la aproximación hecha brinda siempre un valor del momento de inercia mayor que el valor exacto. El error porcentual es

$$\mathcal{E}_{Esfera}(2N) = \frac{|I_{\text{Exacto}} - I_{2N}|}{I_{\text{Exacto}}} 100\% = \frac{175}{2} \frac{1}{(2N)^4} \% \quad (31)$$

Para $N = 1$, es decir, aproximar la esfera por dos cilindros de largo R y radio $\sqrt{3}R/2$, resulta un error menor del 6%; para $N = 2$ el error es menor del 2%. Atendiendo a la cuantía del error cometido en la aproximación cuando $N \rightarrow \infty$, de Ec. (19) se verifica nuevamente que en ese límite el modelo discreto reproduce el valor exacto.

4. Consideraciones finales

Las tres aplicaciones aquí presentadas proporcionan una buena oportunidad para enseñar a construir modelos discretos de sistemas continuos en un curso de física con conocimientos de álgebra, pero sin conocimiento de cálculo integral.

A nuestro actual conocimiento, el cálculo aproximado de momentos de inercia mediante sumas se plantea en algunos textos de física basados en cálculo integral. En efecto, el momento de inercia de una barra que rota en torno a un eje perpendicular por su centro, está desarrollado en el texto de Resnick *et al.* [2] para $N = 10$ y el caso de N arbitrario se plantea como ejercicio al final del Capítulo 15. Por su parte, el cálculo aproximado del momento de inercia de un cilindro de largo L alrededor de un eje por su centro, que es asimilable al caso de nuestro disco está presentado para $N = 4$ en el texto de Swartz y Miner [1].

Los resultados aquí obtenidos permiten cuantificar las predicciones de cada modelo para diferentes valores de N y comparar los resultados de la discretización con los valores exactos obtenido mediante integración. Por ejemplo, con $N = 5$ se obtiene un error del 1%, para la barra; del 2% para el disco y menor del 1% para la esfera (Notar que $N = 5$ en el caso de la esfera, corresponde a utilizar $2N = 10$ elementos para aproximarla).

Finalmente, es interesante tener en cuenta que el mismo principio de discretización puede

ser utilizado para calcular otras propiedades tales como el centro de masa de cuerpos sólidos de geometría simple y centros de presión en fluidos. En general, el problema se reduce a encontrar la discretización apropiada a las propiedades del cuerpo, realizar las sumas correspondientes y luego tomar el límite cuando el número de elementos de la discretización tiende a infinito.

Agradecimientos

G.G. agradece el apoyo del Proyecto anillo ACT24 *Nano-Bio Computer Simulations LAB*.

Apéndice: Suma de potencias de números naturales

La suma de las primeras potencias enteras de números naturales son bien conocidas, y se encuentran en las referencias estándar sobre esta materia [4, 5, 6]

$$\sum_{n=1}^N 1 = N \quad (32)$$

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{1}{2}(N^2 + N) \quad (33)$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{1}{6}(2N^3 + 3N^2 + N) \quad (34)$$

$$\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{1}{4}(N^4 + 2N^3 + N^2) \quad (35)$$

$$\sum_{n=1}^N n^4 = \frac{1}{30}(6N^5 + 15N^4 + 10N^3 - N) \quad (36)$$

Referencias

- [1] C.E. Swartz and T. Miner, *Teaching Introductory Physics: A Sourcebook*. Corrected second printing, Springer-Verlag, 1998, p. 175.
- [2] R. Resnick, D. Halliday y K. Krane, *Física Vol. 1*, 4ta. ed. Compañía Editorial Continental, México, 2002.
- [3] R.A. Serway, *FÍSICA*, 4ta ed. Tomo I, McGrawHill, 1996.
- [4] M.R. Spiegel y L. Abellanas, *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*. McGraw-Hill (colección Schaum), 1980.
- [5] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Inc, 1980.
- [6] *Mathematica*, Wolfram Research Inc., <http://mathworld.wolfram.com/PowerSum.html>