Apuntes

Matemáticas IV (Primavera 2012)

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales (una introducción)

1. Definición de ecuación diferencial

Definición 1.1. *Se dice que un* ***sistema de ecuaciones diferenciales*** *es una ecuación de la forma:*

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1' & = & f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ x_2' & = & f_2(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n' & = & f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

donde $f_i\colon (a,b)\times\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *(*$i=1,\ldots,n$*) y* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto.*

A veces, por simplicidad consideraremos una notación equivalente para (1.1):

$$x' = f(t,x), \tag{1.2}$$

donde :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,x_1,\ldots,x_n). \end{pmatrix}$$

Una mirada a (1.1) muestra que –en términos generales– se trata de un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son funciones y sus derivadas. Esta definición es muy general y contiene diversos casos particulares muy importantes:

Definición 1.2. *Si todas las funciones* f_i *no dependen explicítamente de* t*, se dice que (1.1) es un* ***sistema autónomo****. En el caso contrario, se dice que (1.1) es un* ***sistema no autónomo****. Por lo tanto, un sistema autónomo tiene la estructura siguiente:*

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1' & = & g_1(x_1,\ldots,x_n) \\ x_2' & = & g_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n' & = & g_n(x_1,\ldots,x_n), \end{array}\right. \tag{1.3}$$

donde $g_i\colon\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *(*$i=1,\ldots,n$*) y* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto.*

Como en el caso general, a veces es muy útil considerar su expresión equivalente:

$$x' = g(x). \tag{1.4}$$

Definición 1.3. *Si todas las funciones* f_i *son lineales con respecto a* $x_1,x_2,\ldots,x_n$*, se dice que (1.2) es un* ***sistema lineal****. En el caso contrario diremos que es un* ***sistema no lineal****. Por lo tanto, (1.2) es lineal si:*

$$f(t,x+z) = f(t,x)+f(t,z) \quad \text{y} \quad f(t,\lambda x) = \lambda f(t,x), \tag{1.5}$$

para todo $t \in (a,b)$,$\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $z \in \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, veamos que:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -x_1 \end{array} \right. \tag{1.6}$$

es un sistema lineal autónomo. En efecto, es autónomo dado que la parte izquierda de (5.1) no depende explicítamente de t. En cuanto a la linealidad, sólo hay que verificar que la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$g\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_2 \\ -x_1 \end{array} \right),$$

es lineal.

Más adelante, veremos que este sistema es una forma alternativa (y muy conveniente) del oscilador armónico estudiado en física.

En general, el sistema (1.1) el lineal si y sólo si la función $f(t,x)$ admite una representación de la forma:

$$\left(\begin{array}{c} f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{array} \right) = \left[\begin{array}{cccc} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right)$$

También notemos que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -x_1 + g(t) \end{array} \right. \tag{1.7}$$

es un sistema no lineal y no autónomo. Más adelante, veremos que este sistema es una forma alternativa para describir el oscilador armónico forzado.

Un ejemplo de sistema no lineal autónomo viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2) \\ x_2' & = & x_2(a_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2), \end{array} \right.$$

el cual se conoce como sistema de Lotka–Volterra, dicho sistema juega un papel destacado en ecología teórica.

Podemos realizar la siguiente clasificación de sistemas de ecuaciones diferenciales:

	Autónomo	No Autónomo
Lineal	A	B
No Lineal	C	D

Los sistemas lineales autónomos (Caso A) han sido estudiados exhaustivamente y serán uno de los objetivos principales de este curso (considerando $n \leq 3$.). Su principal propiedad es que tienen n soluciones linealmente independientes, las cuales pueden ser calculadas explícitamente (usando resultados de Valores propios o transformadas de Laplace).

Los sistemas lineales no autónomos (Caso B) tambien tienen n soluciones linealmente independientes. Sin embargo, su cálculo explícito presenta complejidades adicionales.

Los sistemas no lineales presentan (casos C y D) un nivel de complejidad mayor cuando $n \geq 2$ y sólo veremos algunos tópicos sencillos para $n \leq 2$. Es necesario enfatizar, que cuando $n \geq 2$, en la gran mayoría de los casos no es posible encontrar una solución explícita de un sistema no lineal.

Definición 1.4. *Se dice que un* ***problema de valores iniciales*** *o* ***problema de Cauchy*** *es un sistema de ecuaciones diferenciales* (1.1) *que además satisface una condición inicial en* $x(t_0) = x_0$ *(con* $t_0 \in (a,b)$ *y* $x_0 \in \Omega$*):*

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x_1' & = & f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' & = & f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n' & = & f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{1.8}$$

donde $f_i \colon (a,b) \times \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(*$i = 1, \ldots, n$*) y* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto.*

Definición 1.5. *Se dice que una función derivable* $\phi \colon (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *es una* ***solución particular*** *del sistema* (1.1) *si:*

i) *Para todo* $t \in (\alpha, \beta)$ *se tiene que* $(t, \phi(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
ii) *La derivada de* $\phi(t)$ *verifica la igualdad:*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \phi_1'(t) & = & f_1(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \\ \phi_2'(t) & = & f_2(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \\ \vdots & = & \vdots \\ \phi_n'(t) & = & f_n(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)). \end{array} \right.$$

Si una solución $\phi \colon (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *además satisface la condición initial* $x(t_0) = x_0$*, se dice que es solución del Problema de Cauchy* (1.8)*.*

La diferencia entre soluciones particulares de un sistema de ecuaciones diferenciales y soluciones de un problema de Cauchy es sútil. Como ilustración de ello, consideremos la ecuación diferencial:

$$x' = 2x. \tag{1.9}$$

Es fácil observar que todas las funciones $x(t) = ce^{2t}$ (donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria) son soluciones particulares de la ecuación (1.9). Este simple ejemplo demuestra que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones particulares.

Por otro lado, consideremos el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & 2x \\ x(0) & = & 5, \end{array} \right. \tag{1.10}$$

tiene sólo una solución, la cual es $x(t) = 5e^t$.

Otro aspecto importante de la definición es el dominio $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, el cual depende tanto de las condiciones iniciales como del sistema. Por ejemplo, consideremos el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & -x^2 \\ x(0) & = & -1 \end{array} \right. \tag{1.11}$$

y notemos que la solución[1] es $x(t) = \frac{1}{t-1}$, cuyo dominio es $(-\infty, 1)$.

[1] Durante el curso veremos métodos que nos permitirán encontrar soluciones.

Ahora consideremos el problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x^2 \\ x(0) & = & \frac{1}{5} \end{array}\right. \tag{1.12}$$

y notemos que la solución es $x(t) = \frac{1}{(t+5)}$, cuyo dominio es $(-5, +\infty)$.

Otro ejemplo (muy importante!) viene dado por el problema de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -\frac{t}{x} \\ x(1) & = & 0. \end{array}\right. \tag{1.13}$$

Notemos que tiene **dos** soluciones $\phi(t) = \sqrt{1-t^2}$ y $\varphi(t) = -\sqrt{1-t^2}$, cuyo dominio es $[-1, 1]$. Este ejemplo muestra que –algunas veces– un problema de Cauchy no tiene una única solución, esto hace díficil (pero a la vez interesante) el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Uno de los temas más complejos en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias es la determinación de condiciones que aseguren la existencia y la unicidad de la solución para un problema de Cauchy.

2. Algunos ejemplos en ciencias químicas y biológicas

Los sistemas de ecuaciones diferenciales juegan un papel importante en la descripción de numerosos fenómenos físicos, biológicos y químicos. A continuación, veremos algunas aplicaciones de sistemas de ecuaciones diferen ciales a ciencias experimentales.

2.1. Ecuación logística. La ecuación logística fué introducida por el matemático belga Pierre–Francois Verhulst en las obras *Notice sur la loi que la population porsuit dans son acroissement* (1838) y *Deuxième mémoire sur la loi d'acroissement de la population* (Mémoires de l'academie des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique, 20:1–32, 1847). Dicha ecuación es muy usada en ecología de poblaciones para describir la evolución demográfica de una especie animal:

$$P' = rP - \frac{r}{K}P^2 = rP\Big(1 - \frac{P}{K}\Big), \tag{2.1}$$

donde P es la densidad de la biomasa de una especie (*e.g.*, sus unidades son $[kg/km^2]$) , las constantes $r > 0$ y $K > 0$ se denominan respectivamente *tasa de crecimiento intrínseca* y *capacidad de carga.*

A continuación, intentaremos deducir la ecuación logística: recordemos que nos interesa describir el crecimiento neto de la biomasa P de una especie abstracta en un área constante A.

Sea $P(t)$ la densidad en el tiempo t. Sea $B(t)$ la masa total de la población nacida en el intervalo de tiempo $[0, t]$ y sea $D(t)$ la masa de la población fallecida en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Definición 2.1. *La **tasa de natalidad** de la población en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ será definida por*

$$\frac{1}{AP(t_1)}\frac{B(t_2) - B(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Definición 2.2. *La **tasa de mortalidad** de la población en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ será definida por*

$$\frac{1}{AP(t_1)}\frac{D(t_2) - D(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{2.3}$$

La tasa de crecimiento per cápita de la población en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ vendrá dada por

$$\frac{1}{AP(t_1)}\frac{AP(t_2)-AP(t_1)}{t_2-t_1}. \tag{2.4}$$

Con la finalidad de simplificar el modelo, introduciremos la hipótesis de ausencia de inmigración y emigración. Por lo tanto, la tasa de crecimiento per cápita de la biomasa AP (área por densidad = masa total de la población) en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ vendrá dada exclusivamente por la diferencia de las tasas de natalidad y mortalidad:

$$\frac{1}{P(t_1)}\frac{P(t_2)-P(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{1}{AP(t_1)}\frac{B(t_2)-B(t_1)}{t_2-t_1} - \Big(\frac{1}{AP(t_1)}\frac{D(t_2)-D(t_1)}{t_2-t_1}\Big). \tag{2.5}$$

En el libro *An Essay on the Principle of Population* (1798), el economista británico Thomas Malthus consideró los siguientes supuestos:

(M1) La tasa de mortalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{AP(t)}\frac{D(t+h)-D(t)}{h} = d > 0 \tag{2.6}$$

(M2) La tasa de natalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{AP(t)}\frac{B(t+h)-B(t)}{h} = b > 0. \tag{2.7}$$

En síntesis, el modelo de crecimiento malthusiano considera tasas de natalidad y mortalidad constantes. Entonces, en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$, la densidad P puede ser calculada mediante la ecuación (2.5), combinada con las ecuaciones (2.6) y (2.7):

$$\frac{1}{P(t)}\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = b-d$$

Si multiplicamos ambas ecuaciones por $P(t)$, se obtiene:

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = (b-d)P(t).$$

Luego, hacemos el paso al límite $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = (b-d)P(t),$$

Aplicando la definición de derivada en la parte izquierda, se tiene la ecuación de Malthus

$$P'(t) = (b-d)P(t). \tag{2.8}$$

Es fácil notar que si la densidad inicial en $t = 0$ es P_0, entonces la ecuación diferencial (2.8) tiene como solución

$$P(t) = P_0 e^{(b-d)t}. \tag{2.9}$$

Además, notemos que:

- Si $b = d$, entonces $P(t) = P_0$ para todo $t \geq 0$.
- Si $b < d$, entonces $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 0$.
- Si $b > d$, entonces $\lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$.

Una de las consecuencias del modelo malthusiano es que si la tasa de natalidad es menor a la tasa de mortalidad se tiene un decrecimiento exponencial (y una eventual extinción) de la población. Por otro lado, si la tasa de natalidad es mayor a la tasa de mortalidad, entonces la población tiene un crecimiento exponencial. Esta última situación se la llamo *catástrofe malthusiana* y marcó profundamente el panorama científico e intelectual de la primera mitad del siglo XIX.

El trabajo de Verhulst está fuertemente influenciado por el modelo malthusiano y modifica sus hipótesis relativas a la tasa de natalidad:

(V1) La tasa de mortalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{AP(t)}\frac{D(t+h)-D(t)}{h} = d. \tag{2.10}$$

(V2) La tasa de natalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{AP(t)}\frac{B(t+h)-B(t)}{h} = b_0 - b_1 P(t), \quad \text{con} \quad b_0, b_1 > 0. \tag{2.11}$$

Notemos que el gráfico de la función

$$P \mapsto b_0 - b_1 P$$

describe una recta de pendiente $-(b_1/b_0)$ que toma valores positivos en el intervalo $(0, b_0/b_1)$. Es decir, la natalidad es inversamente proporcional a la densidad de la biomasa.

Entonces, la tasa de crecimiento de la biomasa en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ puede ser calculada mediante la ecuación (2.5), combinada con las ecuaciones (2.11) y (2.10):

$$\frac{1}{P(t)}\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = b_0 - d - b_1 P(t).$$

Si multiplicamos ambas ecuaciones por $P(t)$, se obtiene:

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = P(t)\Big\{b_0 - d - b_1 P(t)\Big\}.$$

Luego, hacemos el paso al límite $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = P(t)\Big\{b_0 - d - b_1 P(t)\Big\},$$

Aplicando la definición de derivada en la parte izquierda, se tiene la ecuación diferencial:

$$P'(t) = P(t)\Big\{b_0 - d - b_1 P(t)\Big\}. \tag{2.12}$$

Usando los cambios de variable

$$r = b_0 - d > 0 \quad \text{y} \quad K = \frac{b_0 - d}{b_1},$$

la ecuación (2.12) puede reescribirse como:

$$P' = rP\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\}. \tag{2.13}$$

La Figura 1 presenta la solución numérica (usando SCILAB) de la ecuación logistica, con parametros $r = 0{,}5$, $K = 4$ y una condición inicial de $P(0) = 0{,}15$, ver Anexo 1 para más detalles.

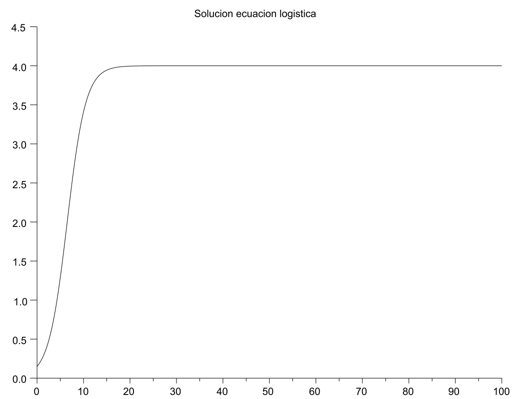

FIGURA 1. Solución de la ecuación logística con $r = 0{,}5$, $K = 4$ y $P(0) = 0{,}15$.

2.2. Sistemas presa predador. Nos interesa describir la dinámica (crecimiento y decrecimiento) de la densidad de la población de dos especies abstractas: una especie de **presas** y una especie de **depredadores** que están presentes en una región de area constante $\mathcal{A}$.

Definiremos por $x(t)$ a la densidad de presas en el tiempo t y por $y(t)$ a la densidad de depredadores en el tiempo t. Nuestro objetivo será describir el comportamiento de ambas variables por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Nuestra primera hipótesis es:

(H1) En ausencia de depredadores, la densidad de presas tiene un crecimiento descrito por la ecuación logística (estudiada recientemente).

$$\frac{dx}{dt} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big), \quad r > 0 \quad \text{y} \quad K > 0. \tag{2.14}$$

Si se quiere modelar la influencia de la depredación, tenemos una ecuación del tipo

$$\frac{dx}{dt} = rx\Big\{1 - \frac{x}{K}\Big\} - \text{Tasa de captura}.$$

Definiremos la **tasa de captura** como:

$$\text{Tasa de captura} = \frac{\text{Número de especies capturadas}}{\textbf{constante de proporcionalidad}} = \alpha.$$

Entonces, la ecuación que describe el crecimiento de la densidad de las presas es del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = rP\Big\{1 - \frac{x}{K}\Big\} - \alpha. \tag{2.15}$$

Nuestra segunda hipótesis es:

(H2) El crecimiento de la densidad de los depredadores es directamente proporcional a la tasa de captura (con constante de proporcionalidad $\lambda > 0$) y la tasa mortalidad de los depredadores es la constante $m > 0$.

Entonces, la ecuación que describe la densidad de los depredadores es del tipo:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda\alpha - my. \tag{2.16}$$

Nuestra tercera hipótesis será:

(H3) Todos los depredadores son capaces de capturar el mismo número de presas. Denotaremos por x_c a dicho número de presas.

Por lo tanto, tenemos que α depende de la densidad de depredadores:

$$\alpha = cx_c y, \quad c > 0. \tag{2.17}$$

Acoplando las ecuaciones (2.15),(2.16) y la propiedad (2.17) obtenemos el sistema formal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big) - cx_c y \\ \frac{dy}{dt} = y(\lambda c x_c - m), x(0) > 0 \quad \text{e} \quad y(0) > 0. \end{array} \right. \tag{2.18}$$

El cálculo de la cantidad de presas capturadas por un depredador (en una unidad de tiempo) es un tema difícil en ecología teórica. Dicho trabajo fué realizado en una serie de trabajos del entomologo canadiense C.S. Holling: *The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the european pine sawfly*. The Canadian Entomologist: 91 (1959) 293–320. *The functional response of predators to prey density and its role in mimiery and population regulation*. Memoirs of the Entomological Society of Canada. 45 (1965) 1–60 y *The functional response of invertebrate predators to prey density*. Memoirs of the Entomological Society of Canada. 48 (1966) 1–86.

2.2.1. Cálculo de x_c (algunas hipótesis). Las ideas de Holling se encuentran expuestas en el libro *An Illustrated Guide to Theoretical Ecology* (Oxford University Press, 2000) del ecólogo Ted J. Case, quien propuso un elegante método geométrico para calcular el número de presas calculadas x_c.

Su idea puede resumirse en los siguientes puntos:

- El movimiento del depredador es considerado como una trayectoria de una vara de largo 2ℓ en el plano a lo largo de un camino recto por trozos (la vara centrada a lo largo del camino).
- La longitud $\ell = \ell(x)$ puede depender de la densidad de las presas o ser constante.
- El depredador se desplaza a velocidad constante s.
- El área recorrida por el depredador en una unidad de tiempo T_s viene dada por:
$$A = 2\ell(x)T_s s.$$
- El depredador sólo es capaz de detectar una fracción $k \in (0,1)$ de las presas:
$$k = \frac{\text{Presas Detectadas}}{\text{Número de presas}}.$$
- Recordemos que la densidad de las presas en el area A recorrida por el depredador es denotada por x.
- Entonces, el número de presas detectadas en un tiempo T_s por el depredador es:
$$x_d = 2\ell(x)T_s skx = k(\text{Area} \times \text{Densidad de presas}).$$

- El coeficiente de capturabilidad de la presa es $\mu \in [0,1]$:

$$\mu = \frac{\text{Número de presas capturadas}}{\textbf{Número de presas detectadas}}.$$

- Entonces, el número x_c de presas capturadas es:

$$x_c = \mu x_d = \mu 2\ell(x) skx T_s. \tag{2.19}$$

Sin embargo, tenemos que hacer notar que el crecimiento del depredador solo tiene lugar en los momentos de consumo. El tiempo destinado a caza y manipulación de la presa no influye en el crecimiento del depredador. Por lo tanto se tiene la siguiente descomposición:

$$T_s = \underbrace{T_t}_{Tiempo\ de\ Consumo} - \underbrace{T_c x_c}_{Tiempo\ de\ Caza} - \underbrace{\mu T_m x_c}_{Tiempo\ de\ manipulacion}. \tag{2.20}$$

2.2.2. Sistemas presa–depredador con respuesta funcional Holling Tipo I. Si suponemos

$$T_c = T_m = 0 \quad \text{y} \quad \ell(x) = \ell \quad \text{constante}$$

y reemplazamos (2.20) en (2.19) se obtiene una caracterización explícita de x_c dada por

$$x_c = \underbrace{2\mu\ell skT_t}_{=a} x = ax \tag{2.21}$$

y se conoce como respuesta funcional Holling tipo I.

Reemplazando (2.21) en (2.18) se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big) - caxy \\ \frac{dy}{dt} = y(\lambda cax - m), \\ x(0) > 0 \quad \text{e} \quad y(0) > 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

2.2.3. Sistema presa–depredador con respuesta funcional Holling Tipo II. Si suponemos

$$T_c > 0, \quad T_m > 0 \quad \text{y} \quad \ell(x) = \ell \quad \text{constante}$$

y reemplazamos (2.20) en (2.19) se obtiene una caracterización explícita de x_c dada por:

$$x_c = \frac{2\ell skT_t\mu x}{1 + 2\ell sk[T_c + \mu T_m]x} = \frac{ax}{1 + bx} \tag{2.23}$$

y se conoce como respuesta funcional Holling tipo II.

Reemplazando (2.23) en (2.18) se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big) - \frac{caxy}{1 + bx} \\ \frac{dy}{dt} = y(\frac{\lambda cax}{1 + bx} - m), \\ x(0) > 0 \quad \text{e} \quad y(0) > 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

2.2.4. Sistema presa–depredador con respuesta funcional Holling Tipo III. Si suponemos

$$T_c > 0, \quad T_m > 0 \quad \text{y} \quad \ell(x) = x^n \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

y reemplazamos (2.20) en (2.19) se obtiene una caracterización explícita de x_c dada por:

$$x_c = \frac{2skT_t\mu x^{n+1}}{1 + 2sk[T_c + \mu T_m]x^{n+1}} = \frac{ax^{n+1}}{1 + bx^{n+1}} \tag{2.25}$$

y se conoce como respuesta funcional Holling tipo III.

Reemplazando (2.25) en (2.18) se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big) - \dfrac{cax^{n+1}}{1 + bx^{n+1}}y \\ \frac{dy}{dt} = y\Big(\dfrac{\lambda cax^{n+1}}{1 + bx^{n+1}} - m\Big), \\ x(0) > 0 \quad \text{e} \quad y(0) > 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

2.2.5. Sistema presa predador generalizado. Una generalización de los sistemas presentados anteriormente viene dada por el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\big(1 - \frac{x}{K}\big) - c\varphi(x)y \\ \frac{dy}{dt} = y\big(\varphi(x) - m\big), \\ x(0) > 0 \quad \text{e} \quad y(0) > 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

donde $\varphi(\cdot)$ es una función continua, diferenciable, creciente tal que $\varphi(0) = 0$. Notemos que este caso generaliza los anteriores sistemas.

2.3. Mezclas de soluto y solvente. Consideraremos un estanque de volumen V que contiene una sustancia sólida minoritaria (denominado soluto) disuelta en un medio (usualmente líquido), el cual es denominado disolvente (por ejemplo, podemos pensar en una sal disuelta en el agua). Además, hay un flujo tanto de entrada como de salida. Se desea estimar la masa de soluto que hay en el estanque en un tiempo t, la cual será denotada por $s(t)$.

Supongamos que la solución tiene una concentración de c_i $[gr/l]$ gramos de soluto por litro cuando fluye hacia el interior del estanque con una tasa constante de r_i $[l/seg]$, en tanto que la contenida en el estanque (suponemos que está bien mezclada) fluye al exterior a una tasa constante de r_0 $[gr/l]$.

Si consideramos la diferencia entre la masa de soluto entrante y la masa de soluto saliente en un intervalo de tiempo $[t, t + h]$, se tiene:

$$s(t + h) - s(t) = \underbrace{c_i r_i h}_{Gramos\ \ ingreso} - \underbrace{(s(t)/V)r_0 h}_{Gramos\ \ egreso}$$

donde $s(t)/V$ es la concentración de soluto que sale al exterior del estanque. Si dividimos por h, se obtiene:

$$\frac{s(t + h) - s(t)}{h} = c_i r_i - \frac{s(t)r_0}{V}.$$

Si se hace el paso al límite $h \to 0$ (y se omite la variable t) se obtiene la ecuación diferencial escalar:

$$s' = c_i r_i - \frac{r_0}{V}s. \tag{2.28}$$

2.3.1. Mezclas con estanques acoplados. Si la salida del estanque anterior, se transforma en la entrada de un segundo estanque de volumen V_2. Podemos deducir que el soluto fluye al segundo estanque con una concentración $s(t)/V_2$ a una tasa constante de r_0 $[gr/l]$ (que coincide con la tasa de salida del primer estanque).

Si la mezcla sale del segundo estanque a una tasa constante de r_2 $[gr/l]$ y la masa de soluto en el tiempo t (en el segundo estanque) se denota por $u(t)$, se puede deducir que la masa de soluto en ambos estanques se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{lcl} s' & = & c_i r_i - \frac{r_0}{V} s \\ u' & = & \frac{r_0}{V_2} s - \frac{r_2}{V_2} u \end{array}\right. \tag{2.29}$$

2.4. Ecuación del bioreactor. La ecuación del bioreactor generaliza el modelo anterior. En este caso el soluto es consumido por una especia microbiana, por lo cual hay procesos de consumo, crecimiento y se debe describir la evolución de laotra variable (especie microbiana). Las ecuaciones del biorector fueron deducidas de forma independiente por el biólogo francés Jacques Monod (*La technique de culture continue. Théorie et applications*. Annales de l'Institut Pasteur, 79:390–410, 1950) y los norteamericanos Aaron Novick y Leo Slizard (*Description of the chemostat*, Science, 112:715–716, 1950). Se describen por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{lcl} s' & = & \frac{F}{V} c^0 - \frac{F}{V} s - \gamma^{-1}\mu(s)x \\ x' & = & x\mu(s) - \frac{F}{V} x, \end{array}\right. \tag{2.30}$$

el cual es utilizado para modelar el crecimiento de biomasa microbiana presente en un medio líquido de volumen constante V ($[mt^3]$). La densidad de dicha especie microbiana en el tiempo t es denotada por $x(t)$ ([mg/l]). Por otro lado, dicha especie se alimenta de un nutriente cuya densidad en el tiempo t es definida por $s(t)$ ([mg/l]). Además, el volumen recibe nutriente adicional con un flujo de entrada $F > 0$ ($[l/seg]$) y concentración $c^0 > 0$ ($[mg/l]$). Por otro lado, la mezcla de nutriente y biomasa microbiana es expulsada del recipiente con un flujo de salida $F > 0$.

Finalmente, dentro del bioreactor existen procesos de consumo de nutriente y crecimiento microbiano, por lo tanto si consideramos la diferencia entre biomasa entrante y saliente de la biomasa del nutriente y la biomasa microbiana en un intervalo de tiempo $[t, t+h]$, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{lcl} Vs(t+h) - Vs(t) & = & \underbrace{Fc^0h}_{Ingreso} - \underbrace{Fs(t)h}_{Salida} - \text{Consumo de nutriente} \\ Vx(t+h) - Vx(t) & = & \text{Tasa de crecimiento microbiana} \quad x(t) - \underbrace{Fx(t)h}_{Saliente} \end{array}\right.$$

La función que describe el consumo de nutriente es $\mu(\cdot)$. Por otro lado, por simplicidad se supone que todo el consumo de nutriente se transforma automáticamente en crecimiento de la biomasa microbiana, con una constante de proporcionalidad $\gamma > 0$.

Entonces, se deduce que:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{s(t+h) - s(t)}{h} & = & \frac{F}{V} c^0 - \frac{F}{V} s(t) - \gamma^{-1}\mu(s(t))x(t) \\ \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h} & = & x(t)\mu(s(t)) - \frac{F}{V} x(t) \end{array}\right.$$

al pasar al límite $h \to 0$ y omitir la dependencia con respecto a t, se obtiene el sistema 2.30.

El biólogo francés Jacques Monod consideró la especie *eschericia coli* y glucosa como nutriente. En tal caso, obtuvo una función del tipo

$$\mu(s) = \frac{\mu_{\text{máx}} s}{k_s + s}. \tag{2.31}$$

Dicha función merece algunos comentarios, recordemos que ella describe la tasa de crecimiento de la biomasa en función del nutriente, por lo tanto:

a) En ausencia de nutriente, no hay crecimiento. Es decir, $\mu(0) = 0$.
b) Mayor cantidad de nutriente implica mayor crecimiento. Es decir, $\mu'(s) > 0$ (el lector debe verificar esto).
c) Se verifica un fenómeno de saturación ante exceso de nutriente, en el cual la tasa de crecimiento tiende a ser constante. Es decir, $\lim\limits_{s \to +\infty} \mu(s) = \mu_{\text{máx}}$. De hecho, $\mu_{\text{máx}}$ se conoce como *tasa de crecimiento máxima.*
d) Cuando $s = k_s$, se tiene que $\mu(s) = \mu_{\text{máx}}/2$. Por ello, k_s es conocida como *constante de semi–saturación.*

El sistema (2.30) también puede ser visto como un prototipo de planta de tratamiento de aguas. En efecto, se puede suponer que el nutriente es un contaminante, el cual ingresa con una concentración c^0 superior a la permitida por autoridades medioambientales. El contaminante es consumido por un microorganismo. Por ejemplo, en en el artículo *Kinetics of phenol oxidation by washed cells* de W. Sokoll y J.A. Howell: Biotechnology and Bioengineering 23:2039–2049 (1981) se considera que el contaminante (y a la vez nutriente) es Fenol y la especie que lo consume es *Pseudomonas Putida.* En tal caso, los autores demuestran que la función que describe el crecimiento del microorganismo es:

$$\mu(s) = \frac{\mu_{\text{máx}} s}{k_s + s^2} \quad \text{con} \quad \mu_{\text{máx}} = 15{,}96 d^{-1} \quad \text{y} \quad k_s = 1{,}82 mg/L. \tag{2.32}$$

La Figura 2.4 muestra la solución del sistema (2.30) con una función $\mu(\cdot)$ descrita por (2.32) y una concentración entrante de Fenol de 7.2 mg/L (En 1990, EPA Environmental Protection Agency de EE.UU. admitía un umbral de toxicidad de 0.49 mg/L !!!) en un estanque de un litro. Notemos que al cabo de un día, el estanque libera fluído con concentración de Fenol bajo 0.49 mg/L.

2.5. Ecuación del bioreactor con competición. En el modelo precedente de bioreactor suponíamos la existencia de una especie microbiana que se alimentaba de un nutriente. Si suponemos que dos especies microbianas (con densidades x_1 y x_2) compiten por el mismo nutriente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s' &=& \frac{F}{V} c^0 - \frac{F}{V} s - \gamma_1^{-1} \mu_1(s) x_1 - \gamma_2^{-1} \mu_2(s) x_2 \\ x_1' &=& x_1 \mu_1(s) - \frac{F}{V} x_1, \\ x_2' &=& x_2 \mu_1(s) - \frac{F}{V} x_2. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

Si dos especies están comptiendo por un recurso, es interesante conocer los resultados de dicha competición. En tal contexto, si $\mu(s)$ es una función creciente, es importante introducir las constantes λ_1 y λ_2, las cuales satisfacen:

$$\mu_i(\lambda_i) = \frac{F}{V} \quad i = 1, 2.$$

Las constantes λ_i se llaman *concentraciones de quiebre* debido a que:

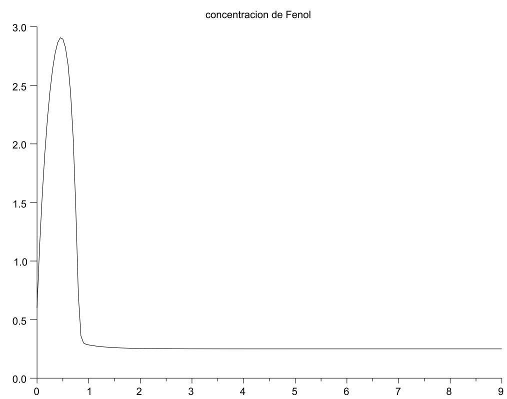

FIGURA 2. Solución de la ecuación del bioreactor con $F = 2{,}119$,$V = 1$, $c^0 = 7{,}2$, $s(0) = 0{,}6$ y $x(0) = 0{,}5$.

- Si la densidad de nutriente es menor que λ_i, la densidad x_i es decreciente. En efecto, si $s < \lambda_i$, se tiene que $\mu_i(s) < \mu(\lambda_i) = F/V$ y por (2.33) se concluye que $x_i < 0$.
- Si la densidad de nutriente es mayor que λ_i, la densidad x_i es creciente. En efecto, si $s > \lambda_i$, se tiene que $\mu_i(s) > \mu(\lambda_i) = F/V$ y por (2.33) se concluye que $x_i > 0$.

La concentración de quiebre λ_i indica entonces la densidad mínima de nutriente necesaria para que la densidad x_i sea creciente. Eso determina la eficacia competitiva de ambas especies. Si $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces la especie de densidad x_1 requiere menos nutriente para crecer que la especie de densidad x_2. Inversamente, si $\lambda_2 < \lambda_1$, entonces la especie de densidad x_2 requiere menos nutriente para crecer que la especie de densidad x_1.

Esto permite formular el *principio de exclusión competitiva*: la especie con menor concentración de quiebre sobrevive mientras que la otra desaparece[2]. Una formulación teórica de la exclusión competitiva puede encontrarse en el artículo de G. Hardin *Competitive exlusion principle*, Science 131:1292–1297 (1960). La primera verificación experimental se realizó con las especies *Saccharomyces cerevisiae* y *Candida utilis*, las cuales competían por glucosa (ver S.R. Hansen y S.P. Hubell, *Single nutrient microbial competition: agreement between experimental and forecast outcomes.* Science 207:1491–1493, 1980).

2.6. Un modelo de fermentación alcohólica. En el caso del vino, el proceso de fermentación alcohólica consiste en un estanque anaeróbico donde la levadura actua como catalizador al interactuar con los azucares del jugo y –mediante una serie de reacciones químicas– convierte el azúcar en etanol. Dicho proceso es descrito (de un modo simplificado) en el artículo *Kinetic model for nitrogen wine fermentations* (Biotechnology Bioengineering 77:49–60, 2002) de A.C. Cramer, S. Vlassides

[2]A finales del curso haremos una demostración formal.

y D. Block, donde se presenta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & \mu(N)X_A \\ X'_A & = & \mu(N)X_A - k_d E X_A \\ N' & = & -\frac{1}{Y_{X/N}}\mu(N)X_A \\ E' & = & -\beta(S)X_A \\ S' & = & -\frac{1}{Y_{E/S}}\beta(S)X_A \end{array}\right. \tag{2.34}$$

donde X es la biomasa total ($[g/l]$), X_A es la biomasa activada ($[g/l]$), N es la densidad de nitrogeno ($[mg/l]$), E es la densidad del etanol ($[g/l]$) y S es la densidad de azúcar ($[g/l]$). La tasa de crecimiento de la biomasa es descrita por la función:

$$\mu(S) = \frac{\mu_{\text{máx}} N}{K_N + N}, \quad \mu_{\text{máx}} > 0 \quad \text{y} \quad K_N > 0.$$

La biomasa activada tiene una tasa de mortalidad que depende linealmente de la concentración de etanol: $k_d E$.

La tasa de utilización del nitrógeno es proporcional al crecimiento de la biomasa activada y la constante de proporcionalidad es $Y_{X/N}^{-1} > 0$.

La tasa de utiilización del azúcar es una función que depende de la concentración del azúcar:

$$\beta(S) = \frac{\beta_{\text{máx}} S}{K_S + S}.$$

2.7. Modelos epidemiológicos. En 1927, los británicos A.G. McKendrick (médico) y W.O. Kermack (químico y matemático) (*Contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 115:700–721) propusieron el siguiente modelo para describir una enfermedad infecciosa que confiere inmunidad tras su padecimiento:

$$\left\{\begin{array}{lcc} S' & = & -bSI \\ I' & = & bSI - \rho I \\ R' & = & \rho I, \end{array}\right. \tag{2.35}$$

el cual es usualmente conocido como modelo SIR, donde I denota el porcentaje de la población infectada, R denota el porcentaje de la población resistente (que ya tuvo la enfermedad y es inmune) y S es el procentaje de la población susceptible (no infectada). La constante $\rho > 0$ es la tasa con la cual los infectados se recuperan de la enfermedad y $b > 0$ es una constante utilizada para describir la tasa de contagio de la enfermedad.

Como el modelo (2.35) supone que no hay mortalidad, se verifica que $S+I+R = 1$. Es decir, la población total se subdivide en susceptibles, infectados y resistentes.

En el caso de una enfermedad infecciosa que no confiere inmunidad tras haberla adquirido (lo cual hace posible un segundo contagio) se tiene el modelo SIS:

$$\left\{\begin{array}{lcl} S' & = & -bSI + \gamma I \\ I' & = & -\gamma I + bSI, \end{array}\right. \tag{2.36}$$

donde I denota el porcentaje de la población infectada y S es el procentaje de la población susceptible (no infectada). La constante $\gamma > 0$ es la tasa con la cual los infectados se recuperan de la enfermedad y $b > 0$ es una constante utilizada para describir la tasa de contagio de la enfermedad.

Como el modelo (2.36) supone que no hay mortalidad, se verifica que $S+I = 1$. Es decir, la población total se subdivide en susceptibles e infectados.

2.8. Red Neuronal. Una red de n neuronas es usualmente descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & -a_1x_1+\sum\limits_{j=1}^{n} b_{1j}f_j(x_j)+\gamma_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n' & = & -a_nx_n+\sum\limits_{j=1}^{n} b_{nj}f_j(x_j)+\gamma_n, \end{array}\right. \tag{2.37}$$

Donde $x_i(t)$ denota el valor (en el tiempo t) de alguna de una variable continua en la i–ésima neurona. Las constantes $a_i>0$ son llamadas *coeficientes de resistividad* de la i–ésima neurona y los coeficientes γ_i son entradas externas a la i–ésima neurona.

Los coeficientes $b_{ij}\geq 0$ (coeficiente de eficiencia sináptica) indican el efecto de la j–ésima neurona en la i–ésima. Además, la función $f_j\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ denota el nivel de activación de la j–ésima neurona, usualmente se considera la función escalón de Heaviside:

$$f_j(u)=\left\{\begin{array}{lcl} 0 & \text{si} & u\leq 0 \\ 1 & \text{si} & u>0. \end{array}\right.$$

Para más detalles, el lector interesado puede consultar el libro de F.C. Hoppensteadt: *An Introduction to the Mathematics of Neurons*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

3. Ejercicios

1.- Determine si los siguientes sistemas son lineales o no lineales. Determine si son autonómos o no autonómos.

i) El sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & \tan(x_1)-x_2 \\ x_2' & = & -x_1. \end{array}\right.$$

ii) El sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & \tan(x_1)-\sin(t)x_1+cos(t)x_2 \\ x_2' & = & -x_1. \end{array}\right.$$

iii) El sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & e^tx_1-t^2x_2 \\ x_2' & = & x_1+x_2. \end{array}\right.$$

iv) El sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & e^tx_1-t^2x_2 \\ x_2' & = & x_1+x_2+4. \end{array}\right.$$

v) El sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1+5x_2 \\ x_2' & = & 3x_1+20x_2. \end{array}\right.$$

vi) El sistema:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1^2-\cos(t)x_2 \\ x_2' & = & 0. \end{array}\right.$$

2.- Clasifique las ecuaciones de la sección 2 de acuerdo a las propiedades de linealidad y autonomía.

3.- Verifique que la función $\varphi(t)$ es solución de la ecuación respectiva.

i) $\varphi(t)=\tan(t)$ es solución de $x'=1+x^2$.

ii) $\varphi(t) = e^{-at^2}$ es solución de $x' = -2atx$.
iii $\varphi(t) = \sin(t^n)$ es solución de la ecuación $x' = nt^{n-1}\sqrt{1-x^2}$.
iv) $\varphi(t) = K$ es solución de la ecuación logística (2.1).
v) $\varphi(t) = Kx_0e^{rt}/(K + x_0(e^{rt} - 1))$ es solución de la ecuación logística (2.1).
vi) $\varphi(t) = \pi/4$ es solución de la ecuación $x' = \tan(x) - 1$.
vii) $\varphi(t) = 8$ es soluci'on de la ecuación $x' = (x - 8)$.

4.- Considere el polinomio $ax^2 + bx + c$. Si dicho polinomio tiene raíces reales x_a y x_b, demuestre que $\varphi(t) = x_a$ y $\varphi(t) = x_b$ son soluciones de la ecuación diferencial [3]:
$$x' = ax^2 + bx + c.$$

5.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$. Demuestre que $\varphi(t) = a$ es solución de la ecuación difeencial:
$$x' = f(x).$$

6.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con la propiedad
$$f(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$
Demuestre que toda solución de la ecuación diferencial:
$$x' = f(x),$$
es una función creciente.

7.- Demuestre que toda solución de la ecuación diferencial:
$$x' = \sin(x) - 2$$
es una función decreciente.

8.- Demuestre toda solución $t \to \varphi(t)$ del problema de Cauchy:
$$\begin{cases} x' &= xf(x) \\ x(0) &= x_0 > 0, \end{cases}$$
verifica la propiedad $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$ ($t \in Dom(\varphi)$).

9.- Los sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo Kolmogorov tienen la estructura:
$$\begin{cases} x_1' &= x_1h_1(x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' &= x_2h_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots &= \vdots \\ x_n' &= x_nh_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$
Demuestre que si las condiciones iniciales verifican $x_i(0) > 0$ (para todo $i = 1, \ldots, n$), entonces las soluciones son positivas en todo su dominio de definición.

10.- Verifique que si el sistema (2.30) tiene condiciones iniciales $s(0) > 0$ y $x(0) > 0$, entonces sus soluciones son positivas.

11.- Compruebe que si las condiciones iniciales del sistema (2.36) satisfacen $S(0) + I(0) = 1$, entonces las soluciones verifican $S(t) + I(t) = 1$ en todo su dominio de definición.

---

[3] Dicha ecuación es un caso especial de la *ecuación de Riccati* que será estudiada en el próximo capítulo.

12.- Un lago tiene un volumen de 458 Km^3 y sus flujos de entrada y salida son de 175 Km^3 por año. Suponga que en el tiempo $t = 0$ la concentración de contaminante es el 0,05 por ciento del volumen mientras que el volumen de agua entrante tiene una concentración de 0,01 por ciento de contaminante. Si suponemos que el agua se mezcla perfectamente dentro del lago, demuestre que la ecuación diferencial que describe la evolución de la masa de contaminante viene dada por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -0{,}3821x + 0{,}0175 \\ x(0) & = & 0{,}2290. \end{array} \right.$$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales escalares

1. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Los problemas de Cauchy del tipo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & a(t)x \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{1.1}$$

donde $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[t_0, +\infty)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ se denominan ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

Teorema 1.1. *La solución del problema de valores iniciales* (2.1) *es:*

$$x(t) = \left\{\begin{array}{ll} x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr} & \text{si} \quad x_0 \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x_0 = 0. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Demostración. Primero supongamos que $x_0 \neq 0$. Sea $x(t)$ una solución de (1.2) y usando la pregunta 8 de la guía de ejercicios anterior, se concluye que $x(t) \neq 0$ para todo $t > 0$ finito. Ahora, notemos que $x(t)$ satisface la identidad:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t).$$

Es fácil observar que la parte izquierda es la derivada de $\ln(x(t))$[1], por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\big(\ln(x(t)\big) = a(t),$$

luego integramos entre t_0 y t para obtener:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\big(\ln(x(s)\big)\,ds = \ln(x(t)/x_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds.$$

Aplicamos la función exponencial a ambos lados:

$$\frac{x(t)}{x_0} = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds},$$

tras lo cual se deduce (1.2). □

En el caso de que $a(t) = a$ es una función constante se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 1. *La solución del problema de Cauchy:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{1.3}$$

[1] La expresión $x'(t)/x(t)$ también es conocida como la *derivada logarítmica de* $x(t)$.

es:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{a(t-t_0)} & \text{si} \quad x_0 \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x_0 = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Además:

i) *Si* $a < 0$*, la solución* (1.4) *verifica* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

i) *Si* $a > 0$*, la solución* (1.4) *verifica* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

1.1. Decaimiento radioactivo. Cuando $a < 0$, la ecuación (2.1) es muy útil en la descripción de procesos de decaimiento de una substancia radioactiva. En efecto, se ha observado que una substacia radioactiva decae en proporción directa a la cantidad de materia radioactiva que aun queda. Por lo tanto, si $x(t)$ es la masa de material radiactivo en el tiempo t, se verifica que su desintegración satistace la ecuación diferencial

$$x' = -kx \quad \text{con} \quad k > 0,$$

donde k es una constante positiva de proporcionalidad. Si x_0 es la masa inicial de material radioactivo al iniciarse el proceso de desintegración, se tiene que la evolución del proceso es descrita por el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= -kx \\ x(0) &= x_0 > 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que la solución viene dada por $x(t) = x_0 e^{-kt}$.

1.2. Crecimiento bacteriano. Cuando $a > 0$, la ecuación (2.1) es muy útil en la descripción de procesos de crecimiento bacteriano, cuyas tasas de natalidad y son constantes, por lo cual tienen un crecimiento de tipo Malthusiano (ver capítulo anterior).

Por lo tanto, si la biomasa bacteriana en el tiempo t está descrita por $x(t)$. Entonces su crecimiento está descrito por la ecuación diferencial:

$$x' = kx \quad \text{con} \quad k > 0,$$

donde k es una constante positiva de proporcionalidad (la cual consiste en la diferencia de la tasa de natalidad y de mortalidad). Si x_0 es la biomasa bacteriana inicial al iniciarse el proceso de crecimiento, se tiene que la evolución del proceso es descrita por el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= kx \\ x(0) &= x_0 > 0 \end{cases}$$

y su solución es $x(t) = x_0 e^{kt}$.

2. Ecuaciones lineales con perturbación no homogénea

Estudiaremos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= a(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.1. Método de variación de parametros de Lagrange. Las ecuaciones del tipo (2.1) son muy importantes en las ciencias físicas y biológicas. Estudiaremos su resolución por medio del método de variación de parámetros de Lagrange.

Si $x(t)$ es una solución de (2.1), notemos que la ecuación es equivalente a:

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t).$$

Ahora, multiplicamos esa ecuación por la función $e^{-\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}$, obteniendo:

$$e^{-\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}x'(t) - e^{-\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}a(t)x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}b(t).$$

Usando el primer teorema fundamental del cálculo[2] y la definición de derivada de un producto de funciones, podemos notar que esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}x(t)\Big) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}b(t).$$

Ahora, integramos la ecuación entre t_0 y t, obteniendo:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}\Big(e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}x(s)\Big)\,ds = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}b(s)\,ds.$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo[3], se tiene que:

$$\Big(e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}x(s)\Big)\Big|_{t_0}^{t} = e^{-\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}b(s)\,ds.$$

Si multiplicamos ambos lados por $e^{\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}$, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1 (variación de parámetros de Lagrange)**.** *La solución del problema de Cauchy* (2.1) *es:*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(r)\,dr}b(s)\,ds. \tag{2.2}$$

Corolario 2. *La solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' &= ax+b \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

es:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}b\,ds = e^{a(t-t_0)}x_0 + \frac{b}{a}\Big(e^{a(t-t_0)} - 1\Big). \tag{2.4}$$

En particular, si $a<0$*, se verifica que* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\frac{b}{a}$.

Ejemplo 1: Considere el problema de valores iniciales:

$$x' = \cos(t)x + \cos(t) \quad \text{con} \quad x(0) = 2.$$

Notemos que:

$$\int_{0}^{t}\cos(r)\,dr = \sin(t) \quad \text{y} \quad \int_{s}^{t}\cos(r)\,dr = \sin(t) - \sin(s).$$

---

[2]El primer Teorema fundamental del cálculo dice que si $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(s)\,ds$ y las funciones $\alpha(\cdot)$ y $\beta(\cdot)$ son derivables, entonces $F'(t) = f(\alpha(t))\alpha'(t) - f(\beta(t))\beta'(t)$.

[3]El segundo Teorema fundamental del cálculo dice que si $g(\cdot)$ es derivable, entonces $\int_{t_0}^{t} g'(s)\,ds = g(t) - g(t_0)$.

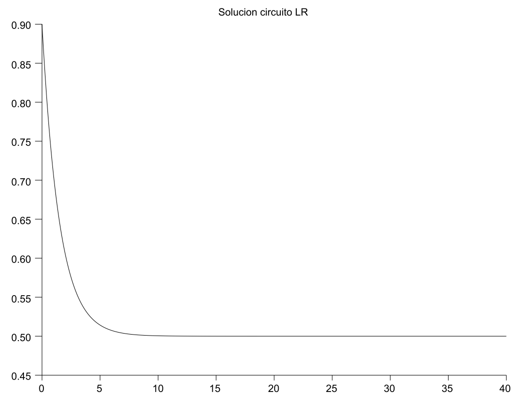

FIGURA 1. Solución de la ecuación del circuito LR con $L = 3$ Ohm, $E = 1$ Volt, $L = 3$ e $i(0) = 0{,}9$ Ampere

Por lo tanto, se tiene que:

$$\int_0^t e^{\int_s^t \cos(r)\,dr} \sin(s)\,ds = e^{\sin(t)} \int_0^t e^{-\sin(s)} \cos(s)\,ds.$$

Entonces, la solución es

$$x(t) = 2e^{\sin(t)} + e^{\sin(t)} \int_0^t e^{-\sin(s)} \cos(s)\,ds.$$

Usando el cambio de variable $u = \sin(s)$, tenemos que

$$\int_0^t e^{-\sin(s)} \cos(s)\,ds = \int_0^{\sin(t)} e^{-u}\,du = 1 - e^{-\sin(t)}.$$

Finalmente, se tiene la solución:

$$x(t) = 2e^{\sin(t)} + e^{\sin(t)} - 1 = 3e^{\sin(t)} - 1.$$

Ejemplo 2: La ecuación de un circuito LR con voltaje constante $E > 0$, se describe por el problema de valores iniciales:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \quad \text{con} \quad i(0) = i_0 \geq 0,$$

donde i es la intensidad de la corriente eléctrica, R es una resistencia y L es una inductancia.

Notemos que la ecuación puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad \text{con} \quad i(0) = i_0 \geq 0,$$

luego, podemos ver que la solución viene dada por:

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} i_0 + \frac{E}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-s)}\,ds = e^{-\frac{R}{L}t} i_0 + \frac{E}{L}\Big(\frac{L}{R}[1 - e^{-\frac{R}{L}t}]\Big)$$

y se observa que $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t) = \frac{E}{R}$.

Ejemplo 3: Consideremos la ecuación diferencial

$$tx' + 2x = t^3, \quad \text{con} \quad x(2) = 1$$

En primer lugar, notemos que la solución $x(t)$ satisface la ecuación:

$$x'(t) = -\frac{2}{t}x(t) + t^2,$$

la cual es equivalente a:

$$x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = t^2,$$

luego multiplicamos la ecuación por $e^{2\int_2^t \frac{1}{r}\,dr} = t^2/4$ y se obtiene:

$$\frac{t^2}{4}x'(t) + \frac{t}{2}x(t) = \frac{t^4}{4}.$$

Notemos que la ecuación de la izquierda es la derivada de un producto:

$$\Big(\frac{t^2}{4}x(t)\Big)' = \frac{t^4}{4}.$$

Integramos entre 2 y t, obteniendo:

$$\frac{t^2}{4}x(t) - x(2) = \int_2^t \frac{s^4}{4}\,ds = \frac{t^5}{20} - \frac{32}{20}.$$

Como $x(2) = 1$, se tiene que:

$$x(t) = \frac{1}{5}\Big(t^3 - \frac{12}{t^2}\Big).$$

2.2. El caso de la caída libre de un objeto. La velocidad de caída libre de un objeto de masa m puede ser calculada mediante una ecuación diferencial lineal. En efecto sabemos que la fuerza de atracción gravitacional es:

$$F_g = mg. \tag{2.5}$$

Por otro lado, sabemos que la fuerza de amortiguación es inversamente proporcional a la velocidad del objeto:

$$F_a = -cx', \tag{2.6}$$

donde c es el coeficiente de roce y x' denota la velocidad del objeto.

La segunda ley de Newton dice que la fuerza total es la masa por la aceleración del objeto, la cual debe ser igual a la suma de (2.5) y (2.6), obteniendo:

$$mx'' = -cx' + mg. \tag{2.7}$$

Si realizamos el cambio de variable $v = x'$, la ecuación (2.7) se trasforma en:

$$v' = -\frac{c}{m}v + g. \tag{2.8}$$

Sea $v(t)$ una solución de (2.8). Entonces escribimos:

$$v'(t) + \frac{c}{m}v(t) = g$$

y luego multiplicamos por $e^{\frac{c}{m}t}$, obteniendo:

$$e^{\frac{c}{m}t}v'(t) + \frac{c}{m}e^{\frac{c}{m}t}v(t) = \big(e^{\frac{c}{m}t}v(t)\big)' = ge^{\frac{c}{m}t}.$$

Integramos entre 0 y t, obteniendo:

$$e^{\frac{c}{m}t}v(t) - v(0) = g\int_0^t e^{\frac{c}{m}s}\,ds.$$

Donde $v(0)$ es la velocidad inicial de caída del objeto. Ahora reescribimos y se obtiene la solución:

$$v(t) = e^{-\frac{c}{m}t}v(0) + ge^{\frac{c}{m}t}\int_0^t e^{\frac{c}{m}s}\,ds = e^{-\frac{c}{m}t}v(0) + \frac{mg}{c}\big(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\big).$$

Finalmente, notemos que

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{c},$$

lo cual implica que si los cuerpos caen durante largo tiempo, la fuerza de amortiguamento implicará que la velocidad caída es constante. Mientrás mayor sea la constante de amortiguamiento $c > 0$, menor será la velocidad de caída. Este hecho inspiró la idea del paracaídas.

2.3. Ley de enfriamiento de Newton. Consideremos el cambio de temperatura de un ojeto que se enfría. La ley de enfríamiento de Newton considera que la velocidad del cambio de temperatura es directamente proporcional a la diferencia de temperatura del objeto y del medio que lo rodea. Además, se supone que el medio que rodea al cuerpo tiene una temperatura constante T_{ex}.

La ley de enfríamiento de Newton afirma que la función $t \to T(t)$ (temperatura de una objeto en el tiempo t) es solución del problema de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{rcl} T' & = & -k(T - T_{ex}) \\ T(0) & = & T_0, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

donde $k > 0$ $[\frac{seg}{{}^\circ C}]$ es un coeficiente de conductividad térmico que depende de cada objeto y T_0 es la temperatura inicial del objeto.

Para resolver (2.9), reescribimos:

$$T' + kT = kT_{ex}$$

y multplicamos por e^{kt}, obteniendo:

$$T'e^{kt} + ke^{kt}T = \big(Te^{kt}\big)' = T_{ex}ke^{kt},$$

luego integramos y se obtiene:

$$T(t)e^{kt} - T_0 = T_{ex}\int_0^t ke^{ks}\,ds,$$

al reordenar, se obtiene la solución del problema de Cauchy (2.9):

$$T(t) = T_0e^{-kt} + T_{ex}\big(1 - e^{-kt}\big).$$

Notemos que

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_{ex},$$

es decir, a medida que transcurre el tiempo, la temperatura del objeto converge a la temperatura del medio que lo rodea. La rapidez de dicha convergencia depende el coeficente de conductividad térmica k.

2.4. Sistemas triangulares. Un sistema de ecuaciones triangular superior es del tipo:

(2.10)
$$\left\{\begin{array}{lcr} x_1' & = & a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + a_{13}(t)x_3(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{22}(t)x_2(t) + a_{23}(t)x_3(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ x_3' & = & a_{33}(t)x_3(t) + \ldots + a_{3n}(t)x_n(t) + f_3(t) \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n' & = & a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{array}\right.$$

La particularidad de los sistemas triangulares superiores que el comportamiento de la variable x_n no depende de las variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por lo tanto, x_n puede desacoplarse del sistema (2.10) y verse como ecuación escalar:

$$x_n' = a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \tag{2.11}$$

Usando el Teorema 2.1, sabemos que las soluciones de (2.11) son de la forma:

$$x_n^*(t) = e^{\int_{t_0}^t a_{nn}(r)\,dr} x_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a_{nn}(r)\,dr} f_n(s)\,ds.$$

Ahora, notemos que la coordenada x_{n-1} es solución de la ecuación escalar:

$$x_{n-1}' = a_{n-1n-1}(t)x_{n-1} + a_{n-1n}(t)x_n^*(t) + f_{n-1}(t) \tag{2.12}$$

y usando nuevamente el Teorema 2.1, sabemos que las soluciones de (2.12) son de la forma:

$$x_{n-1}^*(t) = e^{\int_{t_0}^t a_{n-1n-1}(r)\,dr} x_{n-1}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a_{n-1n-1}(r)\,dr} [a_{n-1n}(s)x_n^*(s) + f_{n-1}(s)]\,ds,$$

y el resto de las soluciones se puede calcular recursivamente.

Ejemplo 1: Notemos que problema de mezclas con dos estanques (ver ecuación 2.4 del capitulo anterior):

$$\left\{\begin{array}{lcl} s' & = & c_i r_i - \frac{r_0}{V_1}s \\ u' & = & \frac{r_0}{V_1}s - \frac{r_2}{V_2}u \\ s(0) & = & 1 \\ u(0) & = & 2, \end{array}\right.$$

es un sistema triangular. En efecto, podemos escribirla como:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u' & = & \frac{r_0}{V_1}s - \frac{r_2}{V_2}u \\ s' & = & -\frac{r_0}{V_1}s + c_i r_i. \end{array}\right.$$

Notemos que la segunda ecuación no depende de la primera, la reescribimos:

$$s' = -\frac{r_0}{V_1}s + c_i r_i.$$

Usando la variación de parámetros de Lagrange y la condición inicial $s(0) = 1$, se tiene que:

$$s(t) = e^{-r_0 t/V_1} + \frac{c_i r_i V_1}{r_0}(1 - e^{-r_0 t/V_1}) = \frac{r_0 - c_i r_i V_1}{r_0} e^{-r_0 t/V_1} + \frac{c_i r_i V_1}{r_0}.$$

Ahora, reemplazamos esta solución en la primera ecuación, obteiendo:

$$u' = -\frac{r_2}{V_2}u + \frac{r_0}{V_1}\Big(\frac{r_0 - c_i r_i V_1}{r_0} e^{-r_0 t/V_1} + \frac{c_i r_i V_1}{r_0}\Big),$$

la cual se resuelve (una vez más) mediante la variación de parametros de Lagrange.

Con los cambios de variable:

$$a = r_2/V_2, \quad b = (r_0 - c_i r_i V_1)/(V_1) \quad \text{y} \quad c = r_0/V_1,$$

la ecuación se reescribe como:

$$u' = -au + be^{-ct} + (c - b).$$

Aplicando el método de variación de parámetros de Lagrange junto con $u(0) = 2$, se tiene que la solución es:

$$u(t) = 2e^{-at} + \frac{b}{a-c}\left(e^{-ct} - e^{-at}\right) + \frac{c-b}{a}(1 - e^{-at}).$$

3. Ecuaciones de Bernoulli

Una ecuación de Bernoulli es del tipo:

$$x' = a(t)x + b(t)x^n. \tag{3.1}$$

La ecuaciones de Bernoulli pueden transformarse en ecuaciones lineales dividiendo la ecuación (3.1) por x^n, obteniendo:

$$\frac{x'}{x^n} = a(t)\frac{1}{x^{n-1}} + b(t). \tag{3.2}$$

Con el cambio de variable $u = x^{1-n}$, derivamos y se tiene:

$$u' = (1-n)x^{-n}x' = (1-n)\frac{x'}{x^n} = (1-n)a(t)\frac{1}{x^{n-1}} + (1-n)b(t), \tag{3.3}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (3.1).

Igualdando el primer y último miembro de (3.3), se tiene que:

$$u' = (1-n)a(t)\frac{1}{x^{n-1}} + (1-n)b(t),$$

finalmente, como $u = x^{1-n} = \frac{1}{x^{n-1}}$, se tiene que (3.1) es equivalente a:

$$u' = (1-n)a(t)u + (1-n)b(t), \tag{3.4}$$

que es una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 1: La ecuación logística (2.1) con condición inicial $P(0) = P_0 > 0$ puede transformarse en una ecuación lineal, mediante el cambio de variable $u = P^{-1}$. En efecto, dicho cambio transforma la ecuación en

$$u' = -ru + \frac{r}{K} \quad \text{con} \quad u(0) = p_0^{-1}. \tag{3.5}$$

y sabemos que su solución es:

$$u(t) = e^{-rt}u_0 + \int_0^t e^{-r(t-s)}\frac{r}{K}\,ds = e^{-rt}u_0 + \frac{e^{-rt}}{K}\int_0^t e^{rs}\,ds = e^{-rt}u_0 + \frac{1-e^{-rt}}{K},$$

lo que es equivalente a

$$u(t) = \frac{e^{-rt}u_0K + 1 - e^{-rt}}{K} = \frac{e^{-rt}[u_0K - 1] + 1}{K}.$$

Por lo tanto, retomando el cambio de variable inicial, se observa que la solución de la ecuación (2.1) con condición inicial $P(0) = p_0 > 0$ es:

$$P(t) = \frac{K}{e^{-rt}[u_0K - 1] + 1} = \frac{Kp_0e^{rt}}{K - p_0 + p_0e^{rt}} = \frac{Kp_0e^{rt}}{K + p_0(e^{rt} - 1)}.$$

Es fácil observar que (por ejemplo, usando la regla de L'Hôpital):

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = K.$$

Recordemos que p_0 es la población inicial y $K > 0$ es la *capacidad de carga*. El estudiante puede verificar que $P(t)$ es una función decreciente cuando $p_0 > K$ (cuando la población inicial es superior a la capacidad de carga) y creciente cuando $p_0 < K$ (cuando la población inicial es inferior a la capacidad de carga).

4. Ecuaciones de Riccati

Son ecuaciones diferenciales de la forma:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *Si se conoce previamente una solución particular $x_1(t)$ de* (4.1), *entonces el cambio de variable:*

$$x = x_1(t) + \frac{1}{v}, \tag{4.2}$$

transforma (4.1) *en la ecuación lineal:*

$$v' = -\{b(t) + 2a(t)x_1(t)\}v - a(t). \tag{4.3}$$

Demostración. Derivamos la ecuación (4.5) y se obtiene:

$$x' = x_1'(t) - \frac{v'}{v^2}.$$

Como x y $x_1(t)$ son soluciones de la ecuación (4.1), teenemos que:

$$a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = a(t)x_1^2 + b(t)x_1 + c(t) - \frac{v'}{v^2}.$$

Podemos concluir la igualdad:

$$a(t)x^2 + b(t)x = a(t)x_1^2 + b(t)x_1 - \frac{v'}{v^2}.$$

Usando el cambio de variable (4.5) en la parte izquierda de la ecuación, se obtiene:

$$a(t)\Big(x_1^2 + 2\frac{x_1}{v} + \frac{1}{v^2}\Big) + b(t)\Big(x_1 + \frac{1}{v}\Big) = a(t)x_1^2 + b(t)x_1 - \frac{v'}{v^2},$$

lo cual es equivalente a:

$$2a(t)\frac{x_1(t)}{v} + \frac{a(t)}{v^2} + \frac{b(t)}{v} = -\frac{v'}{v^2}.$$

Multiplicando por $-v$ se obtiene:

$$v' = -2a(t)x_1(t)v - b(t)v - a(t),$$

lo cual es equivalente a (4.6). □

Ejemplo 1: Consideremos la ecuación:

$$x' + x^2 = 1 + t^2, \quad x(t_0) = a.$$

La parte díficil del ejercicio es encontrar una solución particular de la ecuación[4]. Notemos que la función $x_1(t) = t$ es solución de la ecuación. Luego realizamos el cambio de variable:

$$x = 1 + \frac{1}{v},$$

el cual transforma ecuación (el lector debe verificarlo con cuidado) en la ecuación lineal:

$$v' = 2vt + 1, \quad v(t_0) = 1/(a - t_0).$$

La solución de esta ecuación lineal:

$$v(t) = e^{t^2 - t_0^2} v(t_0) + e^{t^2} \int_{t_0}^{t} e^{-s^2}\, ds.$$

4.1. Ecuación de Riccati autónoma. Las ecuaciones de Riccati del tipo:

$$x' = ax^2 + bx + c, \tag{4.4}$$

son autónomas. En este caso, es más fácil encontrar soluciones particulares.

Corolario 3. *Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces el cambio de variable:*

$$x = x_{\pm} + \frac{1}{v}, \tag{4.5}$$

donde

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

transforma (4.4) *en la ecuación lineal:*

$$v' = -\{b + 2x_{\pm}(t)\}v - a. \tag{4.6}$$

Demostración. Notemos (ver ejercicio 4 del Capítulo 1) que $x_{\pm}$ es una solución de (4.4). Luego, el resultado es una consecuencia del Teorema 4.6. $\square$

Ejemplo 1: Considere el problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^2 - c \\ x(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

con $c > 0$.

Es claro que $x_1(t) = \sqrt{c}$ es solución de la ecuación diferencial $x' = x^2 - c$. Ahora, realizamos el cambio de variable:

$$x(t) = \sqrt{c} + \frac{1}{v(t)}.$$

Notemos que:

$$x'(t) = \frac{v'(t)}{v(t)} = \Big(\sqrt{c} - \frac{1}{v(t)}\Big)^2(t) - c.$$

Lo cual es equivalente al problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v' & = & -2\sqrt{c}v - 1 \\ v(0) & = & \frac{1}{1-\sqrt{c}}. \end{array} \right.$$

[4]No hay un algoritmo para ello, se requiere paciencia y mucha suerte en algunos casos :(.

4.2. El caso de la caída libre de un objeto con roce proporcional al cuadrado de la velocidad. Ya sabemos que la velocidad de caída libre de un objeto de masa m puede ser calculada mediante una ecuación diferencial lineal. En efecto sabemos que la fuerza de atracción gravitacional es:

$$F_g = mg. \tag{4.7}$$

En muchas situaciones, se ha verificado experimentalmente que la fuerza de amortiguación es inversamente proporcional al cuadrado de velocidad del objeto:

$$F_a = -c(x')^2, \tag{4.8}$$

donde c es el coeficiente de roce y x' denota la velocidad del objeto.

La segunda ley de Newton dice que la fuerza total es la masa por la aceleración del objeto, la cual debe ser igual a la suma de (4.7) y (4.8), obteniendo:

$$mx'' = -c(x')^2 + mg. \tag{4.9}$$

Si realizamos el cambio de variable $v = x'$, la ecuación (4.9) se trasforma en la ecuación de Riccati:

$$v' = -\frac{c}{m}v^2 + g. \tag{4.10}$$

Sabemos que $v_1(t) = \sqrt{mg/c}$ es una solución de (4.10). Luego, realizamos el cambio de variable:

$$x(t) = \sqrt{mg/c} + \frac{1}{u(t)}.$$

5. Separación de variables

Una ecuación diferencial se dice que tiene la estructura de variables separables si es de la forma

$$x' = f(t)g(x), \tag{5.1}$$

lo cual permitirá resolver la ecuación de forma explícita. En efecto, reescribimos (5.1) de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

y notemos que formalmente se tiene:

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt,$$

y se puede obtener:

$$\int \frac{1}{g(x)}\,dx = \int f(t)\,dt,$$

lo cual permite obtener soluciones explícitas o implícitas.

Ejemplo 1: Consideremos la ecuación diferencial:

$$x' = 2xt,$$

la reescribimos de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = 2xt$$

y luego escribimos:

$$\frac{dx}{x} = 2t\frac{dt}{,}$$

y la integración indefinida (es decir, sin límites de integración):

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int 2t\,dt.$$

Al integrar se obtiene:

$$\ln(x) = t^2 + C.$$

Si despejamos la variable x se obtiene la solución de la ecuación:

$$x = e^{t^2+C} = e^C e^{t^2} = Ke^{t^2}, \quad \text{con} \quad K = e^C.$$

La constante C es muy importante. De hecho, consideremos el problema de Cauchy:

$$x' = 2xt, \quad x(0) = 2.$$

Sabemos que la solución de la ecuación es $x(t) = Ke^{t^2}$, entonces $x(0) = K = 1$ y la solución del problema de Cauchy es $x(t) = e^{t^2}$.

Ejemplo 2: Considere la ecuación diferencial (con $t > 0$):

$$tx' = (1 - 2t^2)\tan(x).$$

Reescribimos:

$$t\frac{dx}{dt} = (1 - 2t^2)\tan(x),$$

reordenamos:

$$\frac{dx}{\tan(x)} = \frac{1 - 2t^2}{t}dt.$$

Integramos:

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \big(\frac{1}{t} - 2t\big)\,dt$$

y se obtiene:

$$\ln|\sin(x)| = \ln(t) - t^2 + C.$$

Luego se tiene:

$$\sin|x(t)| = e^{\ln(t)-t^2+C} > 0$$

y se concluye que:

$$\sin(x(t)) = Kte^{-t^2}, \quad \text{con} \quad K = e^C.$$

Finalmente:

$$x(t) = \arcsin(Kte^{-t^2}).$$

Ejemplo 3: Considere el problema de Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = tx + t - 2x - 2 \quad x(0) = 2.$$

Notemos que:

$$\frac{dx}{dt} = t(x+1) - 2(x+1) = (t-2)(x+1).$$

Luego:

$$\frac{dx}{x+1} = (t-2)dt$$

e integramos

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \int (t-2)\,dt,$$

obteniendo:

$$\ln|x(t)+1| = \frac{t^2}{2} - 2t + C.$$

Es decir:

$$|x(t)+1| = e^C e^{\frac{t^2}{2}-2t} > 0,$$

lo cual implica que:

$$x(t) = Ke^{\frac{t^2}{2}-2t} - 1 \quad K = e^C.$$

Ahora, si $x(0) = 2 = K - 1$, entonces $K = 3$ y la solución del problema de Cauchy es:

$$x(t) = 3e^{\frac{t^2}{2}-2t} - 1.$$

Ejemplo 4. Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = \cos(x)\cos(t).$$

Luego:

$$\sec(x)\,dx = \cos(t)\,dt$$

e integramos:

$$\int \sec(x)\,dx = \int \cos(t)\,dt = \sin(t) + C.$$

La integral de la secante suele complicar al estudiante, calcularemos con detalle:

$$\int \sec(x)\,dx = \int \sec(x)\frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx = \int \frac{\sec^2(x)+\tan(x)\sec(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx.$$

El estudiante podrá verificar que la derivada del denominador es igual al numerador. Por lo tanto, se tiene que:

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\tan(x)+\sec(x)| = \sin(t) + C.$$

Podemos deducir que

$$|\sec(x)+\tan(x)| = e^C e^{\sin(t)} = Ke^{\sin(t)} > 0, \quad K = e^c,$$

lo cual implica que el gráfico x versus t de las soluciones satisface la relación:

$$\sec(x) + \tan(x) = Ke^{\sin(t)}.$$

Notemos que en este caso no podemos (a diferencia de los anteriores) despejar x en función de t. En estos casos se dice que x está definida implicitamente en función de x.

Ejemplo 5. Determine si el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x't^2 &= x \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

tiene solución.

Notemos que la ecuación puede escribirse de la forma:

$$\frac{dx}{dt}t^2 = x$$

y rescribirse como:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t^2}.$$

Al integrar, se obtiene:

$$\ln(x) = -\frac{1}{t} + C,$$

y obtenemos que toda solución es de la forma:

$$x(t) = e^C e^{-\frac{1}{t}}.$$

Notemos que

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0^-} x(t) = +\infty.$$

Por lo tanto, el problema de Cauchy no tiene solución.

6. Ejercicios

1.- Demuestre que la ecuación del oscilador armónico:

$$\theta'' + \theta = 0$$

puede escribirse como el sistema (5.1). Ayuda: defina $x_1 = \theta$ y $x_2 = \theta'$.

2.- Demuestre que la ecuación del oscilador armónico forzado

$$\theta'' + \theta = g(t)$$

puede escribirse como el sistema (1.7).

3.- Sea x_0 la masa de material radiactivo presente en $t = 0$ y sea $T > 0$ el tiempo necesario para que dicho material se desintegre hasta la mitad (es decir, para que $x(T) = x_0/2$). Verifique que T es independiente de x_0. La constante T se llama *vida media* de la substancia radioactiva.

4.- Sea $x(t)$ la cantidad de una sustancia radioactiva en tiempo t. Si T es la vida media, verifique que:

$$x(t) = x_0 2^{-t/T}.$$

5.- En un momento dado están presentes 100 gramos de material radioactivo. Después de 4 anhos quedan 20 gramos. Cuanto material radioactivo quedará al cabo de 8 anhos?.

6.- Después de seis horas están presentes 60 gramos de material radioactivo. Después de ocho horas (es decir, dos horas más tarde) están presentes 50 gramos. Que cantidad había inicialmente?.

7.- Considere la ecuación del bioreactor (2.30) y realice el cambio de variable:

$$v = s + \frac{1}{\gamma}x.$$

Demuestre que v satisface una ecuación diferencial no homogénea y que todas sus soluciones satisfacen la propiedad:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = c^0.$$

8.- Considere el modelo epidemiológico SIS (2.36) con las condiciones iniciales $S(0) > 0$ e $I(0) > 0$ tales que $S(0) + I(0) = 1$.

i) Demuestre que $S(t) + I(t) = 1$ para todo $t \geq 0$.

ii) Demuestre que el porcentaje de población infectada satisface el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I' & = & (b-\gamma)I - bI^2, \\ I(0) & = & I_0, \end{array} \right.$$

donde $I_0 \in (0,1)$ es el porcentaje de infectados al inicio del brote epidémico.

iii) Usando el método de Bernoulli, encuentre la solución del problema de Cauchy y calcule el límite:

$$\lim_{t\to+\infty} I(t),$$

distinguiendo los casos $b < \gamma$ (tasa de contagio menor a la tasa de recuperación) y $b > \gamma$ (tasa de contagio mayor a la tasa de recuperación).

9.- La ecuación de un circuito LR con voltaje variable $E(t) = E\sin(\omega t)$, se describe por el problema de valores iniciales:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\sin(\omega t) \quad \text{con} \quad i(0) = i_0 \geq 0,$$

donde i es la intensidad de la corriente eléctrica, R es una resistencia y L es una inductancia. Encuentre su solución.

10.- Demuestre que si $p_0 > K$, entonces la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} P' &= rP\Big(1 - \frac{P}{K}\Big) \\ P(0) &= p_0. \end{cases}$$

es decreciente. Demuestre que si $p_0 \in (0,K)$, entonces la solución del problema de Cauchy es creciente. Que pasa cuando $p_0 = 0$ o $p_0 = K$?.

11.- Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones lineales con perturbación homógenea:

i) $x' = x + e^t$.
ii) $x' = \frac{-2x}{t} + 3t$.
iii) $(t+1)^2x' = -3(t+1)x + 2$.
iv) $\tan(t)x' - 2x = 2a$.
v) $tx' + x(t\cot(t) + 1) = \cot(t)$.
vi) $t^2x' + (t^2 + 2t)x = 1$.
vii) $tx' + 2x = 4t^2$, $x(1) = 4$.
viii) $tx' - 3x = t^3$, $x(1) = 0$.
ix) $tx' + (t-2)x = 3t^3e^{-t}$, $x(0) = 1$.
x) $x' - 2x = 4t$, $x(0) = 1$.
xi) $x' - 2tx = 1$, $x(a) = b$.
xii) $x' + \cos(t)x = \cos(t)$, $x(\pi) = 0$.
xiii) $t\ln(t)x' + x = 2\ln(t)$.
xiv) $(t^2+1)x' - 2tx = t^2 + 1$, $x(1) = \pi$.
xv) $x' + 2tx = 2t$.
xvi) $x' + \cot(t)x = 3\sin(t)\cos(t)$.
xvii) $t(t+1)x' - x = 2t^2(t+1)$.
xviii) $tx' - x = t\sin(t)$.

12.- Una taza de Café hirviendo es depositada en la mesa de un restaurante cuya temperatura es de $20^{\circ c}$. Antes de beber el café, el cliente contesta una llamada telefónica y al beberlo, este tenía una temperatura de $40^{\circ c}$. Si el coeficiente conductividad térmica es 8, cuanto tiempo estuvo hablando por teléfono?.

13.- Los forenses encuentran un cadáver al interior de una bóveda con temperatura igual a 20 grados Celsius. Si el coeficiente de conductividad térmica humano es de 2 y el cadáver tenía una temperatura de $28^{\circ C}$, cuanto tiempo llevaba el cadáver en la boveda? (se puede suponer una temperatura inicial de 37^{oc}.)

14.- Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1 + 2x_2 - 3 \\ x_2' &= -5x_2 + 4 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -5$. Calcule el límite de las soluciones cuando $t \to +\infty$.

15.- Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 1 \\ x_2' &= -x_2 + 2x_3 - 1 \\ x_3' &= -x_3 + 1 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 1, 1)$. Calcule el límite de las soluciones cuando $t \to +\infty$.

16.- Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= -3x_1 \\ x_2' &= 5x_1 - x_2 + 2 \\ x_3' &= x_1 + 4x_2 - x_3 + 1 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 1, 1)$. Calcule el límite de las soluciones cuando $t \to +\infty$.

17.- Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$tx' + x + t^2 e^t x^2 = 0.$$

18.- Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$tx' - (3t + 6)x = -9te^{-t} x^{\frac{4}{3}}.$$

19.- Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$3tx^2 x' - 3x^3 = t^4 \cos(t).$$

20.- Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$txx' = x^2 - t^2.$$

21.- Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$x' - 2(\sin(t))x = -2x^{-\frac{3}{2}} \sin(t).$$

22.- Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$2x' + \frac{x}{t+1} + 2(t^2 - 1)x^3.$$

23.- Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$x' = bx^2 - a$$

con $a > 0$ y $b > 0$.

24.- Utilice el método de separación de variables para resolver la ecuación (2.9).

25.- Utilice el método de separación de variables para resolver la ecuación logística.

26.- Utilice el método de separación de variables:

i) $t^5 x' + x^5 = 0$.

ii) $x' = 4tx$.

iii) $x' + x \tan(t) = 0$.

iv) $(1 + t^2)dx + (1 + x^2)dt = 0$.

v) $x\ln(x)dt - tdx = 0$.
vi) $tx' = (1-4t^2)\tan(x)$.
vii) $x'\sin(x) = t^2$.
viii) $x' - x\tan(t) = 0$.
ix) $txx' = x - 1$.
x) $tx^2 - x't^2 = 0$.
xi) $xx' = 4t$, $x(1) = 3$.
xii) $tx' = 4x$, $x(1) = -3$.
xiii $x' = 2tx^2$, $x(2) = 1$.
xiv) $x' = e^t\sqrt{(1-x^2)}$, $x(0) = 1/2$.
xv) $x' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $x(2) = 3$.
xvi) $e^x x' = 4$, $x(0) = 2$.
xvii) $2(x-1)x' = e^t$, $x(0) = -2$.
xviii) $2x' = x(x-2)$.
xix) $3x^2x' = (1+x^3)\cos(t)$.
xx) $\cos^2(t)x' = \sqrt{(1+x^2)}$.

27.- Considere el problema de Cauchy:

$$x' = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0.$$

a) Usando el método de separación de variables, demuestre que

$$\phi(t) = -\frac{t^3}{27}$$

es una solución.

b) Verifique que la función constante

$$\psi(t) = 0$$

también es solución del problema de Cauchy.

c) Verifique que la función:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq n \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{(t-n)^3}{27} & \text{si} \quad t \geq n \end{cases}$$

es solución del problema de Cauchy.

d) En términos generales, discuta si la resolución de una ecuación diferencial por medio variables separables asegura la unicidad de la solución.

28.- Encuentre una solución del sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' &= -2x \\ y' &= x^2y + x \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.
Ayuda: observe que la primera ecuación del sistema no depende de la segunda y puede resolverse de forma independiente. Reemplace la solución obtenida en la segunda ecuación y observe que se trata de un sistema lineal con perturbación no homogénea.

29.- Encuentre una solución del sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= 3x^{-5}y + e^tx \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

30.- El crecimiento de una bacteria se describe usualmento con el modelo malthusiano, es decir, mediante la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax \quad a>0 \\ x(0) & = & x_0>0. \end{array}\right.$$

donde $x(0)$ denota la concentración de la bacteria en el tiempo $t=0$.

i) Sea $x(t)$ la solución del problema de Cauchy anterior. Suponga que en un tiempo $T>0$, se aplica un antibiótico que elimina una fracción $\rho\in(0,1)$ de la bacteria. Demuestre que:

$$\lim_{t\to T^-} x(t)=x_0e^{aT} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to T^+} x(t)=(1-\rho)x_0e^{aT}.$$

ii) Suponga que el antibiótico es aplicado en instantes de tiempo T,$2T$,$3T$,$4T$,... y en cada uno de esos instantes se destruye una fracción $\rho\in(0,1)$ de la bacteria[5]. Demuestre que en el intervalo $(nT,[n+1]T)$, la concentración de la bacteria es descrita por la ecuación:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax \quad a>0 \quad t\in(nT,[n+1]T] \\ x(nT^+) & = & (1-\rho)x(nT)>0. \end{array}\right.$$

donde $x(nT)$ denota la concentración de la bacteria en el tiempo $t=nT$ (antes de aplicar el antibiótico).

iii) Demuestre que las soluciones satisfacen la relación de recurrencia:

$$x([n+1]T)=(1-\rho)e^Tx(nT).$$

iv) Demuestre que si $(1-\rho)e^T<1$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x(nT)=0.$$

es decir, en este caso ρ y T fueron escogidos para un tratamiento eficaz.

v) Demuestre que si $(1-\rho)e^T>1$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x(nT)=+\infty,$$

es decir, en este caso T y ρ no condujeron a un tratamiento eficaz.

[5] T es la frecuencia con la cual se aplica el antibiótico y ρ es la eficacia del mismo

Capítulo 3

Números complejos

1. Motivación

La ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

es ampliamente estudiada en la enseñanza media. Notemos que si $a \neq 0$, podemos escribir la ecuación equivalente:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \tag{1.2}$$

Sumando $b^2/4a^2$ a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Pero notemos que es equivalente a:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Si $b^2 \geq 4ac$, aplicamos la raíz cuadrada a ambos lados obteniendo:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.3}$$

Por lo tanto, si $b^2 > 4ac$, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales, definidas por:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.4}$$

Si $b^2 = ac$, la ecuación cuadrática tiene una raíz real (de multiplicidad dos), definida por:

$$x = \frac{-b}{2a}. \tag{1.5}$$

Por otro lado, si $b^2 < 4ac$, se dice que (1.1) no tiene raíces reales (esto se debe a que el dominio de la función $u \mapsto \sqrt{u}$ es $[0, +\infty)$). Este caso es interesante: **el polinomio ax^2+bx+c tiene coeficientes reales, pero no tiene raíces reales**. Esto motiva a realizar una reflexión sobre el cuerpo de los números reales: Existe algún cuerpo $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$ que contenga todas las raíces de la ecuación (1.1)?.

El estudio de las raíces de los polinomios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \quad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{F}, i = 0, \ldots, n. \tag{1.6}$$

donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo[1], jugará un papel importante en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales.

En tal sentido, se introduce la siguiente definición:

Definición 1.1. *Un cuerpo $\mathbb{F}$ es **algebraicamente cerrado** si todo polinomio* (1.6) *tiene n raíces en $\mathbb{F}$.*

El ejemplo de la ecuación cuadrática muestra que el cuerpo de los números reales no es algebraicamente cerrado. Es decir, existen polinomios con coeficientes reales que no tienen raíces reales.

2. El cuerpo de los números complejos

Definición 2.1. *El conjunto de números complejos se define como* [2]*:*

$$\mathbb{C} = \Big\{ z = a + ib \colon a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad i^2 = -1 \Big\}. \tag{2.1}$$

*Además, dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se dice que a es la **parte real** de z (también la denotaremos por $\mathrm{Re}(z)$) y b es la **parte imaginaria** de z (también la denotaremos por $\mathrm{Im}(z)$). Finalmente, el símbolo i se conoce como **unidad imaginaria**.*

Comentario 1. *Notemos que:*

i) *El conjunto de los números reales es un subconjunto de los números complejos. Es decir: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. En efecto, si $a \in \mathbb{R}$ es claro que $a + 0i \in \mathbb{C}$.*
ii) *Como $i^2 = -1$, se tiene que:*
$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i$$
y se puede continuar recursivamente.
iii) *De igual forma, como $i^2 = -1$, asumieremos que*
$$\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = i.$$

Ahora podemos resolver la ecuación cuadrática (1.1) en el caso $b^2 < 4ac$. En efecto, recordemos que a partir de (1.1) habíamos deducido la identidad:

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

por otro lado, como $b^2 - 4ac < 0$, se tiene que:

$$b^2 - 4ac = (-1)(4ac - b^2) = i^2(4ac - b^2).$$

Reemplazando en la igualdad precedente se obtiene:

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{i^2(4ac - b^2)}{4a^2}.$$

Aplicamos la raíz cuadrada a ambos lados obteniendo:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{2.2}$$

[1] En Matemáticas I y II, el estudiante ha trabajado con los cuerpos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

[2] Muchos (y muy buenos) libros de ingeniería eléctrica utilizan j en vez de i al definir los números complejos. Esto se debe a que i se reserva para definir la corriente eléctrica. Sin embargo, en los textos matemáticos se usa invariablemente i.

y concluímos que, si $b^2 < 4ac$, entonces la ecuación cuadrática (1.1) tiene dos raíces complejas:

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{4c - b^2}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \tag{2.3}$$

Diremos que dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Es decir, si:

$$z = a + ib, \quad \text{y} \quad w = c + id$$

satisfacen la igualdad $z = w$, entonces $a = c$ y $b = d$.

Debemos enfatizar que la unidad imaginaria i **no es** un número real, y por ahora es un símbolo que satisface la identidad formal $i^2 = -1$.

A continuación, definiremos dos operaciones sobre el conjunto $\mathbb{C}$:

• La **Adición** de los números complejos $z = a + ib \in \mathbb{C}$ y $w = c + id \in \mathbb{C}$ se define como:

$$z + z' = (a + c) + i(b + d).$$

• la **Multiplicación** de los números complejos $z = a + ib \in \mathbb{C}$ y $w = c + id \in \mathbb{C}$ se define como[3]:

$$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Ejemplo 1: Consideremos $z = 1 + i$. Como $i^2 = -1$, notemos que

$$z \cdot z = z^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 2i \quad \text{y} \quad z + z = 2z = 2 + 2i.$$

Luego notemos que:

$$z^2 - z = (0 + 2i) + (2 + 2i) = -2,$$

por lo tanto, se tiene que $z = 1 + i$ es solución de la ecuación algebraica $z^2 - 2z + 2$ [4]

Notemos que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$. En efecto, se tiene que: $a = a + i0$ para todo número real $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2: Consideremos $z_1 = -5 + 6i$ y $z_2 = 1 - 4i$. Entonces:

$$z_1 z_2 = (-5 + 6i) \cdot (1 - 4i) = -5 + 20i + 6i - 24i^2 = 19 + 26i.$$

El siguiente resultado se deduce fácilmente de la definición y su demostración de deja como ejercicio para el estudiante:

Lema 1. *Sean $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos. Entonces:*

i) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$.
ii) $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$.

Como habíamos senalado anteriormente, no todo número real tiene raíz cuadrada. En el caso complejo ocurre algo distinto:

Teorema 2.1. *Todo número complejo $z = a + ib$ tiene una raíz cuadrada.*

Demostración. Tenemos que encontrar un número $w = c + id \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$, es decir

$$(c + id)^2 = (c^2 - d^2) + i(2cd) = a + ib.$$

[3] No confundir con el producto interno definido el semestre anterior.

[4] Es fácil verificar que dicha ecuación no tiene raíces reales.

o bien:

$$\begin{cases} c^2 - d^2 &= a \\ 2cd &= b \end{cases}$$

Notemos que ambas ecuaciones implican:

$$b^2 = 4c^2d^2 = 4c^2(c^2 - a).$$

Reescribimos de la forma siguiente:

$$(2c^2)^2 - 4ac^2 = b^2.$$

Sumamos a^2 a ambos lados de la ecuación, obteniendo:

$$(2c^2)^2 - 4ac^2 + a^2 = a^2 + b^2,$$

ahora notemos que esto es igual a:

$$(2c^2 - a)^2 = a^2 + b^2.$$

Entonces tenemos que:

$$2c^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

y luego se obtiene

$$c = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{y} \quad d = \frac{b}{2c}.$$

□

Denotaremos por $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ al conjunto de números complejos provisto de las operaciones de suma y multiplicación recientemente enunciadas. El conjunto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un **cuerpo**, es decir, una estructura algebraica dotada de dos operaciones (suma y multiplicación en nuestro caso) que satisfacen las siguientes propiedades:

1) **Existencia de neutro aditivo:** El número complejo $0 = 0 + i0$, satisface las siguientes propiedades:
$$z + 0 = 0 + z, \quad \text{para todo} \quad z = a + ib \in \mathbb{C}.$$
2) **Conmutatividad de la adición:** Dados dos números complejos arbitrarios $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, se verifica la igualdad:
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$
3) **Asociatividad de la adición:** Dados tres números complejos arbitrarios $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ y $z_3 = a_3 + ib_3$, se verifica la igualdad:
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$
4) **Existencia del inverso aditivo:** Dados un nḿero complejo arbitrario $z = a + ib$, existe un único número complejo $z^* = -a - ib$ tal que:
$$z + z^* = z^* + z = 0.$$
5) **Existencia del neutro multiplicativo:** El número complejo $1 = 1 + i0$, es el único que satisface las siguientes propiedades:
$$z \cdot 1 = 1 \cdot z, \quad \text{para todo} \quad z = a + ib \in \mathbb{C}.$$
6) **Conmutatividad de la multiplicación:** Dados dos nḿeros complejos arbitrarios $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, se verifica la igualdad:
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

7) **Asociatividad de la multiplicación:** Dados tres números complejos arbitrarios $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ y $z_3 = a_3 + ib_3$, se verifica la igualdad:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

8) **Existencia del inverso multiplicativo:** Dados un nḿero complejo $z = a + ib$ distinto de 0, existe un único número complejo z^{-1} definido por:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

9) **Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma:** Dados tres números complejos z_1,z_2 y z_3 se tiene la igualdad:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Es interesante estudiar un poco más en detalle la unicidad del neutro multiplicativo. Sea $w = c + id \in \mathbb{C}$ tal que:

$$w \neq 0 \quad \text{y} \quad z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i = 1 + 0i.$$

Para identificar los valores de c y d escribimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ac - bd &= 1 \\ ad + bc &= 0, \end{cases}$$

y es fácil verificar (el estudiante debe hacerlo!!!) que $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ y $d = -\frac{b}{b^2+d^2}$.
Ejemplo: Dado $z = 2 + i$ es fácil notar que su inverso multiplicativo es:

$$z^{-1} = \frac{2}{2^2 + 1^2} - i\frac{1}{2^2 + 1^2} = \frac{2}{5} - i\frac{1}{5}.$$

Definición 2.2. *La división por un número complejo no nulo se define como:*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \quad z_2 \neq 0. \tag{2.4}$$

Al considerar el caso particular $z_1 = 1$, una consecuencia directa de la Definición 2.2 es:

$$\frac{1}{z_2} = 1 \cdot z_2^{-1} = z_2^{-1}. \tag{2.5}$$

Combinando (2.4) y (2.5), se tiene la igualdad:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \Big(\frac{1}{z_2}\Big). \tag{2.6}$$

Sean $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2 \neq 0$. Una consecuencia de la Definición 2.2 combinada con la unicidad del inverso multiplicativo es la igualdad:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \tag{2.7}$$

Lema 2. *Sean $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos distintos de cero. Entonces*

$$(z_1 \cdot z_2)^{-1} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}. \tag{2.8}$$

Demostración. Como $z_1 \cdot z_2$ es un número complejo distinto de cero, usamos la definición de inverso multiplicativo para concluir que:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)^{-1} = 1. \tag{2.9}$$

Por otro lado, un aplicación combinada de las propiedades de conmutatividad y asociatividad muestra que:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}) = (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_2^{-1} \cdot z_1^{-1}) = (z_1 \cdot (z_2 \cdot z_2^{-1}) \cdot z_1^{-1}),$$

usando la propiedad de neutro multiplicativo, se obtiene la igualdad

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}) = (z_1 \cdot (z_2 \cdot z_2^{-1}) \cdot z_1^{-1}) = z_1 \cdot 1 \cdot z_1^{-1} = z_1 \cdot z_1^{-1} = 1,$$

lo cual nos permite concluir:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}) = 1. \tag{2.10}$$

Por lo tanto, $(z_1^{-1} \cdot z_2^{-1})$ también es inverso multiplicativo de $z_1 \cdot z_2$. La unicidad del inverso multiplicativo implica (2.8). $\square$

Una consecuencia directa es el siguiente resultado:

Corolario 4. *Dados $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos diferentes de cero, se tiene la igualdad:*

$$\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \Big(\frac{1}{z_1}\Big)\Big(\frac{1}{z_2}\Big). \tag{2.11}$$

Lema 3. *Dados $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ y $0 \neq z_3 \in \mathbb{C}$, entonces se tiene la igualdad:*

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}. \tag{2.12}$$

Demostración. Reemplazando $z_1 + z_2$ por z_1 y z_3 por z_2 en la fórmula (2.6) se tiene:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2) \cdot \Big(\frac{1}{z_3}\Big).$$

Reemplazando z_3 por z_2 en la fórmula 2.5, se obtiene:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2) \cdot \Big(\frac{1}{z_3}\Big) = (z_1 + z_2) \cdot z_3^{-1}.$$

Usando la distributividad, se obtiene:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = z_1 \cdot z_3^{-1} + z_2 \cdot z_3^{-1},$$

y la demostración concluye al aplicar la Definición 2.2. $\square$

3. Módulos y conjugados

3.1. Definiciones y propiedades básicas.

Definición 3.1. *Para todo número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define su* ***conjugado*** *$\bar{z}$ y su* ***módulo*** *$|z|$ como sigue:*

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.1}$$

Ejemplo 1: Dado $z = -3 + 2i$, se tiene que:

$$\bar{z} = -3 - 2i \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Ejemplo 2: Dado $z = i$, se tiene que:

$$\bar{z} = -i \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Una consecuencia de la Definición 3.1 es la igualdad

$$|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 \tag{3.2}$$

y las desigualdades:

$$|z| \geq |\,\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z) \quad \text{y} \quad |z| \geq |\,\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z). \tag{3.3}$$

Lema 4. *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces se verifica la igualdad:*

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}. \tag{3.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemoos que

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - iab + iab - (i)^2 b^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2,$$

lo cual concluye la demostración. □

Comentario 2. *Las siguientes identidades se demuestran fácilmente usando la definición de módulo y conjugación:*

i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$,
ii) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$,
iii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
iv) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
v) $|z| = |\bar{z}|$.
vi) $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$.
vii) $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Dados dos números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$, las operaciones de conjugación el módulo permiten una fácil representación del cuociente $\frac{z_1}{z_2}$ como número complejo en forma $a + ib$. En efecto, notemos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot 1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ejemplo 1: Escribiremos el número complejo $(3 + 2i)/(1 + i)$ en forma $a + ib$:

$$\frac{3 + 2i}{1 + i} = \frac{3 + 2i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{5 - i}{1^2 + 1^2} = \frac{5}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2: Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, escribiremos $(z + 2)/(z + 1)$ es forma $a + ib$:

$$\frac{z + 2}{z + 1} = \frac{(x + 2) + iy}{(x + 1) + iy} = \frac{(x + 2) + iy}{(x + 1) + iy} \cdot \frac{(x + 1) - iy}{(x + 1) - iy}.$$

El estudiante debe verificar que:

$$\frac{z + 2}{z + 1} = \frac{[(x + 1)(x + 2) + y^2] + i[(x + 1)y - y(x + 2)]}{(x + 1)^2 + y^2}.$$

Unos sencillos cálculos muestran que:

$$\frac{z + 2}{z + 1} = \frac{x^2 + 3x + 2 + y^2 + i(xy + y - xy - 2y)}{x^2 + 2x + 1 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{x^2 + y^2 + 2x + 1} - i\frac{y}{x^2 + y^2 + 2x + 1}.$$

Ejemplo 3: El número $z = (1+i)/(3-i)$ se representa en forma $a+ib$:

$$\frac{1+i}{3-i} = \frac{1+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{(1+i)(3-i)}{10} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Ejemplo 4: El número

$$z = \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{1}{1+i}$$

se expresa en forma $a+ib$:

$$z = \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1}{5-i} = \frac{1}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + i\frac{1}{26}.$$

Ejemplo 5: Notemos que $z = \frac{1}{i} = -i$. En efecto,

$$z = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = -i.$$

3.2. Otras propiedades del módulo.

Lema 5. *Sean $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|. \tag{3.5}$$

Demostración. Usando el Lemma 3.4 y la propiedad iv) del Comentario 2, se obtiene:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2).$$

Usando las propiedades de conmutatividad, asociatividad y el Lema 3.4, concluímos que:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1) \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot (\bar{z}_1 \cdot z_2) \cdot \bar{z}_2 = (z_1 \cdot \bar{z}_1)(z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2.$$

La demostración se concluye aplicando la raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad. □

Lema 6 (Desigualdad Triangular)**.** *Sean $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{3.6}$$

Demostración. Usando el Lema 4 y la Propiedad iii) del Comentario 2 se tiene que:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_1 + \underbrace{z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1}_{(*)} + z_2 \cdot \bar{z}_2.$$

Si $u = z_1 \cdot \bar{z}_2$, notemos que:

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = u + \bar{u} = 2\,\mathrm{Re}(u) = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq 2|z_1||z_2|,$$

donde la última desigualdad es una consecuencia de (3.3). Por lo tanto, reemplazando en (*) se tiene que:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + z_2 \cdot \bar{z}_2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2$$

o bien:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

y la demostración concluye al aplicar la raíz cuadrada a ambas partes. □

3.3. Regiones del plano complejo. El uso de módulo permite definir la distancia entre dos números complejos:

Definición 3.2. *Sean* $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ *y* $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ *dos números complejos diferentes. Se dice que* ***la distancia entre*** z_1 ***y*** z_2 *es:*

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{3.7}$$

El uso de la distancia permite definir regiones en el plano complejo.

Recordemos que la circunferencia de centro $w = a + ib$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos $z = x + iy$ que están a distancia r del punto w. Es decir:

$$|z - w| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

o bien, que satisfacen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

El disco de centro $w = a + ib$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos $z = x + iy$ que están a distancia menor o igual a r del punto w. Es decir:

$$|z - w| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r,$$

o bien, que satisfacen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2.$$

Por ejemplo, el subconjunto de todos los números complejos de módulo menor o igual a dos:

$$\Big\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 2 \Big\}$$

define un disco de centro $0 = 0 + 0i$ y radio $r = \sqrt{2}$.

En efecto, notemos que si $z = x + iy$, entonces:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2,$$

y al elevar al cuadrado se obtiene

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

4. Forma polar de un número complejo

Definición 4.1. *Todo número complejo* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *distinto de* $z = 0$ *admite una representación en forma polar:*

$$z = r\{\cos(\theta) + i\sin(\theta)\}, \quad \text{donde} \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{4.1}$$

El número θ se dice que es el *argumento* de z y se escribe $\theta = \arg(z)$. Desde un punto de vista geométrico, $\arg(z)$ es el ángulo (medido en radianes) que forma z con el semieje real positivo. Por lo tanto, existe un número infinito de valores reales (todos difieren en múltiplos de 2π) del argumento $\arg(z)$. Cuando la parte real a es distinta de cero, los valores de $\theta = \arg(z)$ pueden determinarse resolviendo la ecuación:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}. \tag{4.2}$$

Notemos que $\tan(\theta) = \tan(\theta + 2n\pi)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto se tiene la igualdad:

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + 2n\pi) = \frac{b}{a}.$$

Por otro lado, si $a = 0$, se tiene si $z = ib$, entonces

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2n\pi & \text{si} \quad b > 0, \\ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi & \text{si} \quad b < 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Unificando estos casos, se obtiene:

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) + 2n\pi & \text{si} \quad a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi + 2n\pi & \text{si} \quad a < 0 \quad \text{y} \quad b \geq 0, \\ \arctan(b/a) - \pi + 2n\pi & \text{si} \quad a < 0 \quad \text{y} \quad b < 0, \\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{y} \quad b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{y} \quad b < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Notemos que (4.2),(4.3) y (4.4) determinan infinitos valores. Por eso se dice que $\arg(z)$ es una función multivaluada (puede tomar muchos valores).

Definición 4.2. *El **valor principal** del* $\arg(z)$ *es el único valor de* $\arg(z)$ *que satisface la ecuacíon:*

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi \tag{4.5}$$

y se denota por $Arg(z)$.

Ejemplo 1: Sea $z = 1 + 1i$. Su representación en forma polar viene dada por:

$$z = \sqrt{2}\{\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\}.$$

En efecto, basta aplicar la Definición 4.1 con $a = b = 1$ y notar que

$$\tan(\theta) = 1,$$

lo cual implica $Arg(1 + i) = \pi/4$.

Ejemplo 2: Sea $z = i$. Su representación en forma polar viene dada por:

$$i = 1\Big[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})\Big].$$

En efecto, aplicamos (4.3) y la Definición 4.1 con $a = 0$ y $b = 1$. Notemos que $Arg(i) = \pi/2$.

Ejemplo 3: La representación polar de $z = -1$ viene dada por:

$$-1 = \cos(\pi).$$

En efecto, es fácil ver por (4.4) que $\arg(z) = \pi$. De hecho, el valor principal de $\arg(\cdot)$ para un número real negativo siempre es π.

Ejemplo 4: La representación polar de $z = -1 - 1i$ viene dada por:

$$z = \sqrt{2}\{\cos(3\pi/4) - i\sin(3\pi/4)\}.$$

En fecto, usando (4.4) tenemos que

$$Arg(-1 - 1i) = \arctan(1) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

y recordemos que $\cos(-3\pi/4) = \cos(\pi/4)$ y $\sin(-3\pi/4) = -\sin(3\pi/4)$.

Lema 7. *Sean $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos distintos de cero. Entonces,*

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \tag{4.6}$$

Demostración. Expresamos z_1 y z_2 en forma polar:

$$z_1 = r_1\{\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\} \quad \text{y} \quad z_2 = r_2\{\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\}.$$

Multplicando se obtiene:

$$z_1 z_2 = r_1 r_1\{[\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)] + i[\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)]\}.$$

Usamos las identidades trigonométricas:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \quad \text{y} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta),$$

podemos deducir que:

$$z_1 z_2 = r_1 r_1\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.$$

Luego, se tiene que

$$\arg(z_1 + z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De igual forma

$$\arg(z_1) = \theta_1 + 2n_1\pi, \quad n_1 \in \mathbb{Z}$$

y

$$\arg(z_2) = \theta_2 + 2n_2\pi, \quad n_2 \in \mathbb{Z}$$

Si elegimos $n_2 = n - n_1$, se verifica (4.6), lo cual concluye la demostración. □

El siguiente Lema tiene una demostración análoga, la cual queda como ejercicio para el estudiante:

Lema 8. *Sean $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos distintos de cero cuya forma polar se expresa:*

$$z_1 = |z_1|\{\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\} \quad \text{y} \quad z_2 = |z_2|\{\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\}.$$

Entonces $\frac{z_1}{z_2}$ tiene representación en forma polar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}.$$

Ejemplo 5: Sean $z_1 = -1$ y $z_2 = i$. Entonces:

$$\arg(-i) = \arg(z_1 z_2) = \arg(-1) + \arg(i) = \pi + \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$$

Como $3\pi/2$ es mayor que π, estamos interesados en encontrar su argumento principal: Notemos que si $n = -1$, se tiene que

$$\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Por lo cual se tiene que

$$Arg(z_1 z_2) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 6: En el ejemplo 2 vimos que:

$$i = 1\big[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})\big].$$

Entonces dado $z = r\{\cos(\theta) + i\sin(\theta)\}$, por el Lema 7 se tiene que:

$$iz = r\big[\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})\big].$$

En efecto $arg(i) = \pi/2$ y $arg(z) = \theta$. Por el Lema 7 se tiene que $\arg(iz) = \frac{\pi}{2} + \theta$.

Ejemplo 7: Sea $z = r\{\cos(\theta)+i\sin(\theta)\}$. Por el Lema 8 se tiene que $z^{-1} = r^{-1}\{\cos(-\theta)+ i\sin(-\theta)\}$.

En efecto, $z^{-1} = 1/z$. Como $\arg(1) = 0$ y $\arg(z) = \theta$. El Lema 8 implica $\arg(z^{-1}) = -\theta$.

Ejemplo 8: Encontraremos una representación en forma polar para $z = (1+i)(\sqrt{3}+ i)$.

En primer lugar, notemos que $z = (1+i)(\sqrt{3}+i) = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$.

Entonces, el módulo viene dado por:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}} = \sqrt{8}.$$

Usando el Ejemplo 1 sabemos que $Arg(1+i) = \pi/4$. Por otro lado, usando (4.4) sabemos que

$$Arg(\sqrt{3}+i) = \arctan\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\big) = \arctan\big(\frac{\sqrt{3}}{3}\big) = \frac{\pi}{6}.$$

En efecto, sabemos que $\sin(\pi/6) = 1/2$ y que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Por lo tanto, $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

Usando el Lema 7, se tiene que:

$$Arg((1+i)(\sqrt{3}+i)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}.$$

Luego, se tiene la representación en forma polar:

$$z = \sqrt{8}\big\{\cos\big(\frac{5\pi}{12}\big) + i\sin\big(\frac{5\pi}{12}\big)\big\}.$$

Comentario 3. *Otras propiedaes interesantes de* $\arg(z)$ *son las siguientes (su demostración se deja al lector):*

i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
ii) $\arg(1/z) = -\arg(z)$.

5. Forma exponencial

A veces, resulta muy conveniente expresar la forma polar de un modo alternativo:

$$z = r\{\cos(\theta) + i\sin(\theta)\} = re^{i\theta}, \tag{5.1}$$

la cual se conoce como forma exponencial o *fórmula de Euler*.

La forma exponencial (5.1) permite una demostración muy sencilla de los Lemas 7 y 8. En efecto, notemos que dados $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0$, se tiene que:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + i\theta_2)} \quad \text{y} \quad z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Una curiosidad numérica es la representación del número $z = -1$ en forma polar y exponencial. Es claro que $|1| = 1$ y que $\arg(-1) = \pi$. Por lo tanto:

$$\cos(\pi) + i\sin(\pi) = e^{i\pi} = -1.$$

Con lo cual se puede construir la interesante ecuación conocida como **Identidad de Euler**:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

6. Potencias y raíces

Las potencias enteras de un número complejo $z = a + ib = r\{\cos(\theta + i\sin(\theta))\}$ (recordemos que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$) vienen dadas por la identidad de De Moivre:

Lema 9. *Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un número complejo. Entonces*

$$z^n = (a + ib)^n = r^n\{\cos(\theta) + i\sin(\theta)\}^n = r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\}. \tag{6.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Notemos que $\arg(z) = \theta$. Por lo tanto observemos que una aplicación recursiva del Lema 7 implica que:

$$\arg(z^n) = \arg(z \cdots z) = \underbrace{\arg(z) + \arg(z) + \ldots + \arg(z)}_{n-veces} = n\theta + 2k\pi.$$

Luego, sabemos que $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por lo tanto $|z^n| = r^n$.

Ahora, sabemos que la representación de z^n en forma polar es del tipo:

$$z^n = |z^n|\{\cos(\arg(z^n)) + i\sin(\arg(z^n))\}$$

tras lo cual se obtiene (6.1). □

Ejemplo 1: Calculemos $z = (1 + i)^{16}$. Primero realizaremos un cálculo directo: notemos que usando las propiedades de potencias, se tiene que

$$(1 + i)^{16} = [(1 + i)^2]^8.$$

Como $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, entonces se tiene (usando otra vez las propiedades de las potencias) que:

$$(1 + i)^{16} = (2i)^8 = 2^8 i^8 = 256(i^2)^4 = 256.$$

Ahora usaremos la identidad de De Moivre: primero veamos que $1 + i = \sqrt{2}\{\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\}$. Por lo tanto:

$$(1 + i)^{16} = \sqrt{2}^{16}\{\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)\} = 2^8 = 256,$$

debido a que $\cos(4\pi) = (-1)^4 = 1$ y $\sin(4\pi) = 0$.

Este ejemplo muestra que el uso de la forma polar y la identidad de De Moivre puede simplificar los cálculos de las potencia de un número complejo.

Una consecuencia directa del Lema 9 combinada con la identidad $z^{-1} = 1/z$ es la siguente expresión:

$$z^{-n} = (a + ib)^{-n} = \frac{1}{r^n\{\cos(\theta) + i\sin(\theta)\}^n} = \frac{1}{r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\}}. \tag{6.2}$$

Si multiplicamos el numerador y denominador de la parte derecha de (6.2) por $\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$ se obtiene:

$$z^{-n} = (a + ib)^{-n} = \frac{1}{r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\}} = \frac{\{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\}}{r^n\{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)\}}.$$

Finalmente, se obtiene:

$$z^{-n} = r^{-n}\{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)\}. \tag{6.3}$$

Ejemplo 2: Calculemos $(1 + i\sqrt{3})^{11}$. Primero observemos que:

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2n\pi.$$

En efecto, recordemos que $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(\pi/3) = 1/2$. Luego $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Por otro lado, es claro que $|1 + i\sqrt{3}| = r = \sqrt{1+3} = 2$. Por lo tanto, tenemos la representación en forma polar:

$$(1 + i\sqrt{3}) = 2\{\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\}.$$

Usando la identidad de De Moivre, tenemos que:

$$(1 + i\sqrt{3})^{11} = 2^{11}\{\cos(11\pi/3) + i\sin(11\pi/3)\} = 2^{11}\{\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)\}.$$

Como $(11\pi/3) = (12\pi/3) - (\pi/3)$, $\cos(-\pi/3) = 1/2$, $\sin(-\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene:

$$(1 + i\sqrt{3})^{11} = 2^{11}\{\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)\} = 2^{11}\Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

7. Raíces de n–ésimas de números complejos

Diremos que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n–ésima ($n \geq 1$) de $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si

$$w^n = z \quad \text{o bien} \quad \sqrt[n]{z} = w.$$

El caso $n = 2$ fué estudiado al inicio del capítulo, donde demostramos que todo número complejo admite una raíz 2–ésima (cuadrada). El siguiente resultado es una generalización y se demuestra gracias a la representación de un número complejo en su forma polar:

Teorema 7.1. *Todo complejo $z \neq 0$ tiene exactamente n raíces n–ésimas:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad \theta = Arg(z).$$

Demostración. Sea $z = |z|e^{i\theta}$. Usando la fórmula de De Moivre, podemos ver que $w = |w|e^{i\phi}$ (con $\phi = Arg(w)$) es raíz n–ésima de z si y sólo si:

$$z = w^n = (|w|e^{i\phi})^n = |w|^n e^{in\phi} = |z|e^{i\theta}.$$

Por lo tanto, tenemos las igualdades:

$$|w|^n = |z| \quad \text{y} \quad n\phi = \theta + 2k\pi.$$

Como $|z| > 0$ y $|w| > 0$, tenemos que:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Por lo tanto, las raíces n–ésimas son de la forma:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notemos que $w_n = w_0$, en efecto:

$$w_n = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\theta}{n}+2\pi)} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta}{n}} = w_0.$$

Del mismo modo, $w_{n+j} = w_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, las únicas raíces distintas son $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, lo cual concluye la demostración. □

Los números complejos que satisfacen la ecuación:

$$z^n = 1 \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7.1}$$

se llaman raíces n–ésimas de la unidad.

Como $Arg(1) = 0$, se tiene dado $n \in \mathbb{N}$, las n raíces de la unidad son:

$$w_k = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad \theta = Arg(z).$$

8. Mas referencias

Existen muchos y muy buenos textos dedicados a los números complejos: el capítulo I de [**2**], el captúlo VI de [**6**], el capítulo XIII de [**13**] y el capítulo 1 de [**18**].

9. Ejercicios

1.- Demostrar el Lema 1.

2.- Calcular:
   i) $(2+i)(6+3i)$.
   ii) $(-1-i)(5+i)$.
   iii) $(1+i)(1-i)$.
   iv) $(2-3i)(-2+i)$.
   v) $(3+i)(3-i)(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i)$.

3.- Deduzca la fórmula (2.7).

4.- Demuestre las siguientes identidades:
   i) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$.
   ii) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$.
   iii) $1/(1/z) = z$ cuando $z \neq 0$.

5.- Demuestre las identidades del comentario 2.

6.- Usando las propiedades de la conjugación, exprese en la forma $a+ib$:
   i) $\frac{3+5i}{2-3i}$,
   ii) $\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$,
   iii) $\frac{1+i}{1-i}$,
   iv) $\frac{(1+i)^2}{3-i}$,
   v) $\frac{(c+id)^2}{c-id} - \frac{(c-id)^2}{c+id}$.

7.- Exprese en forma $a+ib$:
   i) $(1+i)(2-i)(1-i)$,
   ii) $\dfrac{12+8i}{2-3i} + \dfrac{52+13i}{13i}$.
   iii) $\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$.
   iv) $\dfrac{i\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(iz)}$.
   v) $\frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ (resp. $\frac{1}{2}i$).
   vi) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$ (resp. $-\frac{2}{5}$).

8.- Demuestre que:
   i) $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2$.
   ii) $\operatorname{Im}(z^2) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)$.

9.- Determine cuales de los siguientes enunciados son verdaderos:
   i) $\operatorname{Re}(\beta z)$, cuando $\beta \in \mathbb{R}$.
   ii) $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)$.
   iii) $\operatorname{Im}(z_1 - z_2) = -\operatorname{Im}(z_2 - z_1)$.
   iv) $\operatorname{Im}((z_1 - z_2)^2) = -\operatorname{Im}((z_2 - z_1)^2)$.

10.- En las siguientes identidades x e y son números reales. Encuentre dichos valores:
   i) $i(x+iy) = x+1+i2y$.
   ii) $x^2 - y^2 + i2xy = -ix + y$.

iii) $(x+iy)^2 = i$.
iv) $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - 2x + iy$.
v) $\sin(e^x) + i\cos(x) = 1 + i\sin(y)$.

10.- Demuestre la igualdad:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|,$$

para todo par de números complejos $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$.

11.- Demuestre la desigualdad:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

para los números complejos z_i $(i = 1, \ldots, n)$.

12.- Demuestre las desigualdades:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{y} \quad |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|,$$

para todo par de números complejos $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$.

13.- Identifique mediante un dibujo cual es la región en el plano complejo definida por las desigualdades

$$1 \leq |z| \leq 3.$$

14.- Demuestre la igualdad:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

Ayuda: Considere $(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$.

15.- Demuestre que:
i) $|e^{i\theta}| = 1$,
ii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
iii) $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$.
iv) $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\cdots e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)}$.

16.- Escriba en forma polar los siguientes números complejos:
i) $\sqrt{3} + i$.
ii) $-\sqrt{3} - i$.
iii) $(3+4i)(3+4i)(1+i)$.
iv) $2 - 2i$.
v) $3 + 4i$.
vi) $5 + 5i$.
vii) $-5 + 5i$.
viii) $-5 - 5i$.

17.- Escriba las siguientes expresiones en la forma $a + ib$ y en la forma polar:
i) $(-\sqrt{3} + i)^9$.
ii) $(-\sqrt{3} - i)^5$.
iii) $(3+4i)^{12}(1+i)^{12}$.
iv) $(1+2i)^{19}$.

17.- Hallar la raíz cuadrada de los siguientes números complejos:
i) $-5 + 12i$,
ii) $-11 - 60i$,
iii) $-47 + 8\sqrt{-1}$,
iv) $-8\sqrt{-1}$,
v) $a^2 - 1 + 2a\sqrt{-1}$,
vi) $4ab - 2(a^2 - b^2)\sqrt{-1}$.

18.- Si 1,ω y ω^2 son tres raíces cúbicas de la unidad, demostrar que:

i) $(1+\omega^2)^4 = \omega$,

ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2) = 4$,

iii) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$.

Capítulo 4

Vectores y Valores propios

1. Motivación

Hemos visto que las transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ están definidas a través de una expresión de la forma

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n);$$

o bien:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, sabemos que la matriz representante con respecto a la base canónica[1] de $\mathbb{R}^n$: viene dada por:

$$[T]_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, la base canónica y la matriz representante asociada a ella pueden ser demasiado complicadas al aplicarlas en diversas situaciones problemáticas, Por esta razón, sería deseable encontrar una base $\mathbb{B}$ con la cual la matriz representante de T sea más simple, por ejemplo:

$$[T]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

En caso que esto ocurra y que $\mathbb{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ sea tal base, entonces en esa base se tendría que:

$$T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$$

para cada $i = 1, 2, 3 \ldots n$. Esto motiva la definición que damos a continuación.

Definición 1.1. *Decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **valor propio** de una transformación lineal u operador lineal $T\colon V \to V$ donde V es un espacio vectorial de dimensión finita n (por ejemplo $\mathbb{R}^n$), si existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. En este caso decimos que $\vec{v}$ es un **vector propio** de T asociado al valor propio λ.*

[1] La base de vectores $\mathcal{B}_c = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$

Ejemplos

1. Los escalares 3 y 4 son valores propios del operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - y, 2x + 5y)$. En efecto, notemos que:

   $$T(1, -1) = (3, -3) = 3(1, -1) \quad \text{y} \quad T(1, -2) = (4, -8) = 4(1, -2).$$

   En este caso decimos que $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ es un vector propio asociado al valor propio 3 y que $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$ es un vector propio asociado al valor propio 4.
2. La unidad es un valor propio del operador identidad $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y cualquier vector no nulo es un vector propio de id asociado al valor propio 1.

De la definición anterior se deduce que si $\mathbb{R}^n$ tiene una base $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ cuyos elementos son vectores propios de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y

$$T(v_i) = d_i v_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

entonces la matriz representante con respecto a dicha base es (1.1). En este caso decimos que la transformación lineal T es diagonalizable y su expresión en la base $\mathbb{B}$ es $T(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n)$.

En el ejemplo 1 anterior tenemos que $T(1, -1) = 3(1, -1)$ y $T(1, -2) = 4(1, -2)$, de manera que T es diagonalizable y además

$$[T]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo la expresión de T en la base $\mathbb{B} = \{(1, -1), (1, -2)\}$ es $T(u_1, u_2) = 3u_1, 4u_2$.

2. Cálculo de valores y vectores propios

Cabe preguntarse: Cómo determinamos los valores y vectores propios de una transformación lineal?.

Supongamos que $A = [T]_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c}$ es la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces, $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})^t$ es un vector propio de T asociado al valor propio λ si y sólo si $T(v_i) = \lambda v_i$, o sea si $Av_i = \lambda v_i$ o en términos matriciales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $(A - \lambda I)v = 0$, el cual se reescribe como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Estudiemos las propiedades del sistema $(A-\lambda I)v = 0$. En primer lugar, recordemos que [2]:

- Si $\det(A-\lambda I) \neq 0$, entonces el sistema tiene una solución unica, la cual es $v = 0$. Este caso no nos interesa, pues la Definición 1.1 requiere que $v \neq 0$.
- si $\det(A-\lambda I) = 0$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones, dichas soluciones son los valores propios que estamos buscado!.

La ecuación 2.1 permitirá hallar los valores propios de T (o de la matriz A) y se llama **ecuación característica** de T (o de A). Conocidos los valores propios es posible hallar los vectores propios asociados a esos valores propios.
Ejemplos:

1. Examinemos el caso de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x-y, 2x+5y)$ definida en el ejemplo 1 anterior.

   La representación matricial de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es
   $$[T]_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
   De manera que la ecuación característica es
   $$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0.$$
   O sea
   $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$
   que equivale a la ecuación polinomial:
   $$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda-3)(\lambda-4) = 0.$$
   Resolviendo esta ecuación se encuentran los valores propios o valores característicos de T, los cuales son $\lambda = 3$ y $\lambda = 4$.

   Para hallar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 3$, hay que encontrar las soluciones no triviales del sistema de ecuaciones lineales
   $$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
   o sea
   $$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Este sistema es equivalente a la ecuación $x + y = 0$ o $y = -x$. En consecuencia, todo vector de la forma $(x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$, con $x \neq 0$ es un vector propio de T asociado al valor propio λ.

   Para el valor propio $\lambda = 4$ se tiene:
   $$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
   o sea
   $$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Este sistema es equivalente a la ecuación $2x + y = 0$ o $y = -2x$. En consecuencia, todo vector de la forma $(x, y) = (x, -2x) = x(1, -2)$, con $x \neq 0$ es un vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = 4$.

[2] Tema visto en el curso de Matemáticas III

Es T diagonalizable?

Es claro que $(1,-1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 3$ y $(1,-2)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 4$. Claramente estos vectores son linealmente independientes, por lo tanto $\mathcal{B} = \{(1,-1),(1,-2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de T; por consiguiente T es diagonalizable. La matriz asociada a f en la base B es

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y la expresión de T en esa base es $T(u_1,u_2) = (3u_1, 4u_2)$.

Construyamos una matriz cuyas columnas son los vectores propios:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y su inversa} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y notemos que $P^{-1}AP = D$ o $A = PDP^{-1}$.

2. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (6x+4z, x+2y-z, -3x-z)$ definida en el ejemplo 1 anterior.

   La representación matricial de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$[T]_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   De manera que la ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

   Desarrollando por la segunda columna obtenemos la ecuación:

$$(2-\lambda)((6-\lambda)(-1-\lambda)+12) = 0,$$

   que es equivalente a:

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0.$$

   Resolviendo esta ecuación se encuentran los valores propios o valores característicos de T (decimos que 2 es un valor propio doble o que tiene multiplicidad algebraíca 2).

   Para hallar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 2$, hay que encontrar las soluciones no triviales del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

   o sea

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Este sistema es equivalente a las dos ecuaciones $x+z=0$ y $x-z=0$, de donde se obtiene $x=z=0$. Como no se halla condición sobre la variable y, ésta puede tomar cualquier valor. Entonces, los vectores propios de T asociados al valor propio $\lambda_1 = 2$ son los vectores de la forma $(x,y,z) = (0,y,0) = y(0,1,0)$, con $y \neq 0$.

Para el valor propio $\lambda_2 = 3$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o sea

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es equivalente a las dos ecuaciones $3x+4z = 0$ y $x-y-z = 0$. Despejando z de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene: $y = \frac{7}{4}x$ y $z = \frac{3}{4}x$. En consecuencia, todo vector de la forma $(x, y, z) = (x, \frac{7}{4}x, \frac{3}{4}x) = x(1, \frac{7}{4}, \frac{3}{4})$, con $x \neq 0$ es un vector propio de T asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$.

Es T diagonalizable?

Entre los vectores propios de T asociados al valor propio 2 podemos seleccionar sólo un vector propio linealmente independiente y otro entre los vectores propios asociados al valor propio 3. Como 2 vectores propios linealmente independientes no son suficientes para formar una base de $\mathbb{R}^3$, entonces este espacio no puede ser una base formada por vectores propios de T y por lo tanto T no es diagonalizable.

3. Consideraremos una transformación lineal que difiere en el signo de un coeficiente con aquel dado en el ejemplo anterior y obtendremos una transformación lineal diagonalizable. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por la igualdad $T(x, y, z) = (6x + 4z, x + 2y + z, -3x - z)$.

Sin dificultad, el lector puede verificar que la ecuación característica es la misma que la hallada en el ejemplo 2, por lo tanto los valores propios son los mismos que en el ejemplo 2. Para hallar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 2$, hay que encontrar las soluciones no triviales del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o sea

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema de ecuaciones lineales es equivalente a la ecuación $x + z = 0$, de donde $z = -x$. Como no hay restricción para la variable y, los vectores propios T asociados al valor propio $\lambda_1 = 2$ son todos los vectores no nulos de la forma

$$(x, y, z) = (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0).$$

Para el valor propio $\lambda_2 = 3$ resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 4z & = 0 \\ x - y + z & = 0 \end{cases},$$

de donde

$$\begin{cases} z & = -\frac{3}{4}x \\ y & = \frac{1}{4}x \end{cases}.$$

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 3$ son todos los vectores de la forma

$$(x, y, z) = (x, \frac{1}{4}x, -\frac{3}{4}x) = x(1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}),$$

con $x \neq 0$ (para $x = 4$ se obtiene el vector propio $(4, 1, -3)$). En este caso podemos seleccionar los vectores $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 0)$ asociados al valor propio $\lambda_1 = 2$, y el vector propio $(4, 1, -3)$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$. Un candidato a base del espacio vectorial es el conjunto $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (4, 1, -3)\}$. Como B consta de tres vectores que son linealmente independientes, porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces efectivamente B es una base de $\mathbb{R}^3$, siendo entonces T diagonalizable. Desde luego que la matriz asociada a T en esta nueva base es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en tanto que la expresión de T en esta base esta dada por $T(u_1, u_2, u_3) = (2u_1, 2u_2, 3u_3)$.

Después de haber examinado estos ejemplos el lector puede haber notado algunas regularidades que podemos expresar en términos precisos.

Lema 10. *Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal y A es la matriz representante asociada a la base canonica; Entonces $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n y variable λ. Es decir,*

$$\det(A - \lambda I) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Demostración. Consideremos el caso $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y es fácil verificar que

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Ahora veamos el caso $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

y notemos que

$$\det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}$$

es equivalente a:

$$(a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)([a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}]-[a_{22}+a_{33}]\lambda+\lambda^2)-a_{12}([a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}]-a_{21}\lambda)+a_{13}([a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}]-a_{31}\lambda)$$
$$= -\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(a_{21}a_{12}-a_{13}a_{31}-a_{22}a_{33}+a_{23}a_{32}-a_{11}a_{22}-a_{11}a_{33})\lambda+\det(A).$$

□

El caso $n = 3$ muestra lo laborioso que resulta el cálculo de los coeficientes c_i. Esto ha motivado el desarrollo de numerosos métodos y algoritmos para encontrar los coeficientes c_i con menor dificultad: Método de Newton, método de expansiones directas, algoritmo de Leverrier, método de Fadeev, método de Danilevsky, método de Krylov.

Definición 2.1. *El polinomio* $\det(A-\lambda I)$ *se denomina* ***polinomio característico*** *de la matriz* A.

Una consecuencia de esta definición es que los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A.

Teorema 2.1. *Una transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *cuya matriz representante con respecto a la base canónica de* $\mathbb{R}$ *es* A*, tiene a lo más* n *valores propios.*

Demostración. Sabemos que $\det(A-\lambda I)$ definido por (2.2) es un polinomio de grado n con coeficientes reales. Por lo tanto, podemos usar el **Teorema fundamental del álgebra**, el cual afirma que $\det(A-\lambda I)$ tiene n raíces complejas (considerando multiplicades algebraicas). Esto significa que el polinomio característico tiene dos representaciones posibles:

$$\det(A-\lambda I) = (\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)\cdots(\alpha_n-\lambda) \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

o bien

$$\det(A-\lambda I) = (\alpha_1-\lambda)^{m_1}(\alpha_2-\lambda)^{m_2}\cdots(\alpha_\ell-\lambda)^{m_\ell} \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

con $m_1 + m_2 + \ldots + m_\ell = n$.

En el primer caso, se tiene que el polinomio característico tiene n raíces complejas distintas. Por otro lado, en el segundo caso se tiene que el polinomio tiene $\ell < n$ raíces distintas, algunas de las cuales tienen multiplicidad algebraica $m_i > 1$. □

Proposición 1. *El conjunto de todos los vectores propios asociados a un mismo valor propio* λ *de una transformación lineal* T *y el vector nulo forman un subespacio vectorial de* V*.*

Demostración. Denotemos por V_λ el conjunto cuyos elementos son el cero y los vectores propios de T asociados al valor propio λ. Entonces es claro que $0 \in V_\lambda$. Además, si $v_1, v_2 \in V_\lambda$, $\alpha, \beta \in K$ (K cuerpo) y definimos $v = v_1 + v_2$, entonces

$$T(v) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda v,$$

por lo tanto $v \in V_\lambda$. Esto prueba que V_λ es subespacio de V. □

Definición 2.2. *Si λ es un valor propio de la transformación lineal $T : V \to V$, decimos que V_λ es el subespacio propio de T asociado al valor propio λ. La dimensión de este subespacio se llama multiplicidad geométrica de λ.*

Proposición 2. *Los vectores propios asociados a valores propios diferentes (de una transformación lineal T) son linealmente independientes.*

Demostración. Por inducción completa. Para un vector el resultado es obvio. Supongamos que el resultado es cierto hasta para $k-1$ vectores y consideremos que $v_1, \ldots, v_k$ son vectores propios asociados respectivamente a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Si se verifica

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0, \tag{2.3}$$

nuestro objetivo será demostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Aplicando T en ambos lados de (2.3) se obtiene:

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = 0.$$

Por lo tanto:

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0.$$

Sin embargo, notemos que (al multiplicar (2.3) por λ_1) también se verifica la igualdad

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_1 v_k = 0, \tag{2.4}$$

Restando las igualdades (2.3) y (2.4), se obtiene:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0.$$

Por la hipótesis de inducción estos $k-1$ vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0.$$

Como los valores propios son distintos entonces $\alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ y entonces debe ser $\alpha_1 v_1 = 0$, de donde $\alpha_1 = 0$. Esto prueba la independencia lineal de los vectores propios. □

Cabe preguntarse qué significa que una transformación lineal $T : V \to V$ sea diagonalizable. Además la siguiente definición parece razonable.

Definición 2.3. *Decimos que una transformación lineal $T : V \to V$ es diagonalizable si existe una base de V cuyos elementos son vectores propios de T.*

El resultado más importante de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.2. *Si todos los valores propios de T están en K y V posee una base de vectores propios de T, entonces T es diagonalizable. Esto ocurre cuando todos los valores propios de T están en K y las multiplicidades algebraicas de éstos coinciden con sus multiplicidades geométricas respectivas.*

Para trabajar con transformaciones lineales $T : V \to V$, siendo V un espacio vectorial de dimensión finita, no necesariamente $\mathbb{R}^n$, hay que recordar algunos hechos importantes:

- Si una transformaci'on $T : V \to V$ se representa en distintas bases B_1 y B_2 mediante matrices A y B, entonces existe una matriz invertible N tal que $B = N^{-1}AN$. En este caso decimos que las matrices son similares.

- Cabe la siguiente pregunta: Para determinar los valores propios de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hemos usado la base canónica de $\mathbb{R}^n$, qué pasará si usamos otra base? Respuesta: Si A y B son las matrices que representan a T en esas bases, entonces existe N invertible tal que $B = N^{-1}AN$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_N) &= \det(N^{-1}AN - \lambda N^{-1}N)\\ &= \det[N^{-1}(A - \lambda I_n)N]\\ &= \det(N^{-1})\det(A\lambda I_n)\det(N)\\ &= \det(A - \lambda I_n)\end{aligned}$$

  Por lo tanto, $\det(B - \lambda I_n) = 0$ si y sólo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$ (ecuaciones características asociadas respectivamente a las matrices B y A). En consecuencia, las ecuaciones características obtenidas son las mismas; esto significa que se obtienen los mismos valores propios. Este último resultado se resume en la siguiente proposición: **Dos matrices similares tienen los mismos valores propios**.
- Si $T : V \to V$ es una trasnformación lineal, entonces para hallar los valores propios de T, podemos representar matricialmente a T en una base cualquiera. Usando la matriz asociada podemos determinar los valores propios de la misma manera que hemos usado para operadores de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Por el mismo razonamiento que hemos empleado en el punto anterior, vemos que usando otra base se encuentran los mismos valores propios.
- Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable y A es la matriz que representa a f en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una matriz P invertible tal que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

  donde P es la matriz cuyas columnas tienen por coeficientes las coordenadas de los vectores propios que forman la base de $\mathbb{R}^n$. En este caso decimos que P es la matriz que diagonaliza a la matriz A. En general, si $T : V \to V$ es diagonalizable y A es la matriz que representa a f en una base B determinada, entonces existe una matriz P invertible tal que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

  Las columnas de P tienen por coeficientes las coordenadas de los vectores propios de T en la base B.

Ejemplos:

1. Hemos visto en el ejemplo 1 anterior que la matriz asociada al operador lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por la igualdad $f(x, y) = (2x - y, 2x + 5y)$, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Además vimos que $(1,-1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 3$ y $(1,-2)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 4$, por lo tanto, la matriz P que diagonaliza a A es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Constatemos que esto es realmente así. A simple vista la matriz P es invertible porque sus vectores columnas son L. I., pero la forma correcta de verificarlo es observando que $\det(P) = -1 \neq 0$. Además:

$$\mathrm{Cof}(P) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Adj}(P) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\mathrm{Adj}(P) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}P \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y la expresión de f en esa base es $f(u_1, u_2) = (3u_1, 4u_2)$.

2. En el ejemplo 3 anterior se ve que la matriz asociada en la base canónica al operador lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (6x + 4z, x + 2y, -3x - z)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una base de vectores propios del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (4, 1, -3)\}$. Los primeros dos vectores de esta base están asociados al valor propio 2 en tanto que el tercer vector está asociado al valor propio 3. Deducimos que la matriz P que diagonaliza a la matriz A es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para constatar este hecho verificamos primero que $\det(P) = 1 \neq 0$, de manera que P es invertible. Además:

$$\mathrm{Cof}(P) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Adj}(P) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando el recíproco del determinante de P por la matriz adjunta de P hallamos su inversa, por lo tanto

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} P \\
&= \begin{pmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la expresión de f en esta base esta dada por $f(u_1, u_2, u_3) = (2u, 2u_2, 3u_3)$.

Ejercicio: Calcular A^{2011} si A es la matriz dada en el último ejemplo 2.
Solución: En el ejemplo 2 anterior hemos visto que existe una matriz P invertible y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a la izquierda por P y a la derecha por P^{-1} ambos miembros de la ecuación $P^{-1}AP = D$, obtenemos $A = PDP^{-1}$. Elevando a la potencia 2011 ambos lados de esta última igualdad se obtiene

$$A^{2011} = (PDP^{-1})^{2011} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^{2011}P^{-1}.$$

Como D es una matriz diagonal, si la multiplicamos por si misma 2011 veces obtenemos

$$D^{2011} = \begin{pmatrix} 2^{2011} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2011} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2011} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
A^{2011} &= PD^{2011}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2011} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2011} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2011} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{2011} & 0 & 4 \cdot 3^{2011} \\ 0 & 2^{2011} & 3^{2011} \\ -2^{2011} & 0 & -3 \cdot 3^{2011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{2011} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2011} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2011} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^{2011} + 4 \cdot 3^{2011} & 0 & -4 \cdot 2^{2011} + 4 \cdot 3^{2011} \\ -1 \cdot 2^{2011} + 3 \cdot 3^{2011} & 2^{2011} & -1 \cdot 2^{2011} + 1 \cdot 3^{2011} \\ 3 \cdot 2^{2011} - 3 \cdot 3^{2011} & 0 & 4 \cdot 2^{2011} - 3 \cdot 3^{2011} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. Algunas definiciones y resultados útiles

Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada.

El símbolo $\sigma(A)$ se denota como el **espectro** de A y consiste en el conjunto de valores propios de A:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \colon \lambda_i \quad \text{es un valor propio de } A\}.$$

El símbolo $\rho(A)$ se denota como el **radio espectral** de A y consiste en:

$$\rho(A) = \{\text{máx}\,|\lambda_i| \colon \lambda_i \in \sigma(A)\}.$$

El siguiente resultado es muy importante y se enuncia sin demostración

Teorema 3.1 (Cayley–Hamilton)**.** *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es:*

$$\det(A - \lambda I) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, \ldots, n).$$

Entonces, la matriz A satisface la ecuación matricial:

$$c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_1A + c_0I = 0, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, \ldots, n).$$

4. Una aplicación en ecología

En el artículo: A dynamic analysis of the viability of the northern spotted owl in a fragmented spotted environment", *Conservation Biology.* 6:505–512 (1992), los ecólogos R.H. Lamberson, R. McKelvey, B.R. Noon y C. Voos estudiaron la dinámica del crecimiento del búho manchado en los bosques del noroeste de Estados Unidos.

Los ecólogos distinguieron tres grandes etapas en el ciclo de la vida de un búho: juvenil (hasta un año de edad), subadulto (entre 1 y 2 años) y adulto (más de dos años). Se realizaron diversos estudios de campo, en los cuales se estimaba la población de juveniles, subadultos y adultos durante cada año.

Consideremos el vector:

$$\begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+,$$

donde j_k es la población de búhos jovenes en el año k, s_k es la población de búhos subadultos en el año k y a_k es la población de búhos adultos en el año k.

Los estudios de campo mostraron grandes regularidades entre los resultados de dos anños consecutivos:

- La cantidad de búhos juveniles en el año $k+1$ es 0,33 veces la cantidad de búhos adultos en el año k. Es decir:

$$j_{k+1} = 0{,}33a_k.$$

- El 18 por ciento de los búhos jovenes en el año k logra sobrevivir y convertirse en subadulto en el año $k+1$. Es decir:

$$s_{k+1} = 0{,}18j_k.$$

- El 71 por ciento de los subadultos del año k logra sobrevivir y llegar a adulto el año $k+1$. De igual forma, el 94 por ciento de los adultos del anõ k logra sobrevivir hasta el año $k+1$. Es decir:

$$a_{k+1} = 0{,}71s_k + 0{,}94a_k.$$

Esto se puede resumir matricialmente de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ s_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

o bien con la forma abreviada:

$$x_{k+1} = Ax_k, \tag{4.2}$$

donde:

$$x_k = \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix}.$$

Una dramática consequencia del modelo de Lamberson es la extinición del búho. Esto se puede demostrar en términos de valores propios y vectores propios. En primer lugar, se puede demostrar que los valores propios son aproximadamente:

$$\lambda_1 = 0{,}98, \quad \lambda_2 = -0{,}02 + 0{,}21i \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -0{,}02 - 0{,}21i.$$

Es fácil verificar que $|\lambda_i| < 1$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Por otro laldo, un ejercicio (complicado numéricamente) muestra que a es diagonalizable, es decir existe una matriz invertible P tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}02 + 0{,}21i & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}02 + 0{,}21i \end{bmatrix}$$

Si realizamos el cambio de variable $x_k = Az_k$, es fácil ver que (4.2) es equivalente a:

$$z_{k+1} = Dz_k \quad \text{con} \quad z_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}.$$

Es decir, (4.3) se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}02 + 0{,}21i & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}02 - 0{,}21i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

Es fácil verificar que:

$$z_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k u_0 \\ \lambda_2^k v_0 \\ \lambda_3^k w_0 \end{pmatrix}.$$

Como $|\lambda_i| < 1$ se puede demostrar que:

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_i^k = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto $z_k \to 0$ cuando k tiende a inifinito. Esto implica además que:

$$\lim_{k \to +\infty} Pz_k = \lim_{k \to +\infty} x_k = \lim_{k \to +\infty} \begin{pmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que equivale a la extinción de los buhos con el transcurso de los anõs.

5. Bibliografía complementaria

El lector puede consultar el capítulo IV de [**4**], el capítulo 1 (sección 8) de [**14**], los libros [**9**],[**12**],[**13**] tienen capítulos específicos de Valores propios y vectores propios.

6. Ejercicios

1.- Dadas las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

Encuentre sus valores propios y vectores propios. Determine si las matrices son diagonalizables o no.

2.- Sea A una matriz diagonalizable del ejercicio anterior. Construya una matriz P donde cada columna es un vector propio y calcule

$$P^{-1}AP$$

3.- Si A es una matriz diagonal. Demuestre que sus valores propios son los elementos diagonales.

4.- Se A es una matriz triangular. Demuestre que sus valores propios son los elementos diagonales.

5.- Encuentre los valores propios y vectores propios de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -3 \\ 9 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 & -4 & -3 \\ -10 & 12 & -6 \\ -20 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.- Demuestre que si A no es invertible, entonces $\lambda = 0$ es un valor propio.

7.- Sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ los valores propios de una matriz A. Demuestre las siguientes afirmaciones:

i) La transpuesta A^T tiene los valores propios $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

ii) La matriz A^2 tiene los valores propios $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\ldots,\lambda_n^2$.

iii) La matriz A^k (k es un entero positivo) tiene los valores propios $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k$.

iv) La matriz kA tiene los valores propios $k\lambda_1,k\lambda_2,\ldots,k\lambda_n$.

v) La matriz

$$k_mA^m + k_{m-1}A^{m-1} + \ldots + k_1A + k_0I,$$

tiene los valores propios

$$k_m\lambda_j^m + k_{m-1}\lambda_j^{m-1} + \ldots + k_1\lambda_j + k_0, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

vi) Si A es invertible, entonces todos los valores propios son distintos de cero.

vii) Si A es invertible, los valores propios de A son λ_1^{-1},$\lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$.

8.- Considere el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = Ax(t) \tag{6.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Sea $P \in \mathbb{R}$ una matriz invertible. Demuestre que $x(t)$ es solución del sistema (6.1) si y sólo si $y(t) = Px(t)$ es solución del sistema

$$y'(t) = P^{-1}APy(t) \tag{6.2}$$

9.- Sea A una matriz tal que todos sus valores propios son reales positivos. Demuestre que

$$x^T Ax \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(debe considerar x como un vector columna).

10.- Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = 0$. Demuestre que $\sigma(A) = \{0\}$.

11.- Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $A^k = 0$. Demuestre que $\sigma(A) = \{0\}$.

12.- Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $Ker(T - I)$ y

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $Ker(T - 2I)$.

Calcule los valores propios de T y demuestre que es diagonalizable.

Capítulo 5

Sistemas de ecuaciones diferenciales

1. Preliminares

En el capítulo 2 estudiamos las ecuación diferencial lineal escalar:

$$x' = ax$$

y su perturbación:

$$x' = ax + b(t).$$

En este capítulo generalizaremos esos resultados, estudiando el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

y su perturbación:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Con el fin de aligerar un poco la notación, escribiremos el sistema (1.1) como:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \tag{1.3}$$

y el sistema (1.2) como

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}. \tag{1.4}$$

2. Un paréntesis numérico: la exponencial de una matriz cuadrada A

En los cursos anteriores, el alumno estudió la función exponencial $f(t) = e^{at}$, cuyo desarrollo de Taylor es de la forma:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}. \tag{2.1}$$

Una de las propiedades más importantes de $f(t) = e^{at}$ es la identidad $f'(t) = af(t)$, la cual fue fundamental en la técnica de variación de parámetros de Lagrange. El objetivo de este capítulo es generalizar la variación de parámetros de Lagrange para el sistema (1.2).

Definición 2.1. *Sea A una matriz cuadrada. La expresión e^A se definirá como la* ***exponencial de la matriz*** *A y corresponde a:*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.2}$$

A partir de la Definición 2.1, se pueden deducir las siguientes propiedades de la exponencial de una matriz:

i) Si $0_{nn} = 0$ es la matriz con ceros en todos sus filas y columnas, se tiene que $e^0 = I$.
ii) Si A y B conmutan (es decir $AB = BA$), entonces $e^A e^B = e^{A+B}$. Una consecuencia de esta propiedad es:

$$e^{\alpha A} e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A}. \tag{2.3}$$

Sin embargo, la igualdad $e^A e^B = e^{A+B}$ **no** se verifica para cualquier par de matrices.
iii) Si A es nilpotente de orden k, es decir $A^j \neq 0$ para todo $j < k$ y $A^k = 0$. Entonces:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Definición 2.2. *Dada una matriz cuadrada A, se construye una función $\mathbb{R} \to M_{nn}(\mathbb{R})$ definida por e^{tA} y corresponde a:*

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^2A^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^2A^k}{k!} \tag{2.4}$$

En el caso de que la matriz A sea diagonalizable, se tiene un criterio muy eficaz para calcular e^A:

Teorema 2.1. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada diagonalizable. Tal que*

$$D = P^{-1}AP, \tag{2.5}$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal con los valores propios de A y la i–ésima columna de P es un vector propio asociado a λ_i.

Entonces, la exponencial de A se representa como:

$$e^A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{2.6}$$

DEMOSTRACIÓN. La ecuación (2.4) es multiplicada a la izquierda por P^{-1} y a la derecha por P:

$$P^{-1}e^{A}P = P^{-1}P + PAP^{-1} + \frac{PA^2P^{-1}}{2!} + \frac{PA^3P^{-1}}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PA^kP^{-1}}{k!} \tag{2.7}$$

En primer lugar, verificaremos que

$$P^{-1}A^kP = D^k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

En efecto, para $k = 0$ se tiene $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = I = D^0$. Por otro lado para $k = 1$, la igualdad $P^{-1}AP = D$ se deduce de (2.5). En el caso $n = 2$, notemos que:

$$P^{-1}A^2P = P^{-1}AAP = P^{-1}APP^{-1}AP = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = DD = D^2,$$

donde la penúltima igualdad se obtiene aplicando (2.5) dos veces. El resto de los términos se obtiene recursivamente.

Aplicando (2.8) a (2.7) se obtiene:

$$P^{-1}e^{A}P = I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}. \tag{2.9}$$

Por otro lado, notemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

donde la última igualdad es una notable propiedad de las matrices diagonales.

Una mirada cuidadosa de la última expresión nos muestra que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_3^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix}$$

Podemos ver que cada término diagonal **es un desarrollo de Taylor** correspondiente a e^{λ_i}, por lo tanto se obtiene la identidad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Combinando las ecuaciones (2.9) y (2.10) se obtiene la identidad:

$$P^{-1}e^{A}P=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}.$$

Finalmente, si multiplicamos a la izquierda por P y la derecha por P^{-1} se obtiene la identidad (2.6), lo cual concluye la demostración. $\square$

El siguiente resultado se demuestra analogamente

Teorema 2.2. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada diagonalizable. Tal que $D = P^{-1}AP$, donde*

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal con los valores propios de A y la i–ésima columna de P es un vector propio asociado a λ_i.

Entonces, la función e^{tA} se representa como:

$$e^{tA}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P^{-1}. \tag{2.11}$$

Ejemplo 1 Consideremos la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que el polinomio característico de A es:

$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2-3\lambda-10=(\lambda+2)(\lambda-5).$$

Por lo tanto, sabemos que los valores propios de A son $\lambda_1=-2$ y $\lambda_2=5$.

El cálculo de los vectores propios asociados a $\lambda_1=-2$ exige resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x+2y &= 0\\ 3x+y &= 0\end{cases}$$

Como la segunda fila es múltiplo de la primera, se tiene que $y=-3x$. Por lo tanto, se dice que

$$V_{\lambda_1}=\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -3\end{pmatrix}\right\}.$$

El cálculo de los vectores propios asociados a $\lambda_2=5$ exige resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x+2y &= 0\\ 3x-6y &= 0\end{cases}$$

Como la segunda fila es múltiplo de la primera, se tiene que $x = 2y$. Por lo tanto, se dice que

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como la matriz es diagonalizable, construímos las matrices:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente:

$$e^{tA} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

La derivada de e^{tA} se calcula derivando cada uno de los componentes de la matriz, por lo tanto:

$$(e^{tA})' = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 30e^{5t} & -4e^{-2t} + 10e^{5t} \\ 6e^{-2t} + 15e^{5t} & -12e^{-2t} + 5e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Es interesante (por favor calcular!) comprobar las igualdades:

$$\begin{aligned} (e^{tA})' &= \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 30e^{5t} & -4e^{-2t} + 10e^{5t} \\ 6e^{-2t} + 15e^{5t} & -12e^{-2t} + 5e^{5t} \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (e^{tA})' &= \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 30e^{5t} & -4e^{-2t} + 10e^{5t} \\ 6e^{-2t} + 15e^{5t} & -12e^{-2t} + 5e^{5t} \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir la función matricial e^{tA} verifica la propiedad

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A,$$

con lo que generaliza una propiedad de la función exponencial e^{at}.

El siguiente resultado demuestra que dicha propiedad es general:

Teorema 2.3. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada diagonalizable. Tal que $D = P^{-1}AP$, donde*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal con los valores propios de A y la i–ésima columna de P es un vector propio asociado a λ_i.

Entonces, la función:

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{2.12}$$

satiface las identidades:

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A. \tag{2.13}$$

Demostración. Definamos

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

y notemos que

$$(e^{tD})' = De^{tD} = e^{tD}D. \tag{2.14}$$

En efecto,

$$(e^{tD})' = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

y como las matrices diagonales conmutan, se tiene que

$$\begin{aligned} (e^{tD})' &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual implica (2.14).

Ahora, usando $(e^{tD})' = De^{Dt}$ implicada por (2.14), se tiene:

$$(e^{tA})' = (Pe^{tD}P^{-1})' = P(e^{tD})'P^{-1} = PDe^{-t}P^{-1} = PDP^{-1}Pe^{tD}P^{-1}. \tag{2.15}$$

Finalmente, usando $P^{-1}AP = D$ es fácil deducir que $PDP^{-1} = A$. Usando este hecho combinado con $Pe^{tD}P^{-1} = e^{tA}$ y reemplazando en (2.15) se concluye que:

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}.$$

La igualdad $(e^{tA})' = e^{tA}A$ se demuestra de un modo similar y se deja como ejercicio para el estudiante. $\square$

3. La Ecuación diferencial matricial $X'(t) = AX(t)$.

En la sección anterior vimos que dada una matriz diagonalizable $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, la función matricial e^{tA} satisfacía la ecuación diferencial matricial:

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Es decir, e^{tA} es una solución particular de la ecuacion diferencial matricial:

$$X'(t) = AX(t). \tag{3.1}$$

Cabe preguntarse si existen otras soluciones de (3.1). La respuesta es afirmativa:

Teorema 3.1. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada diagonalizable. Tal que $D = P^{-1}AP$, donde*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal con los valores propios de A y P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

es una matrix cuya i–ésima columna es un vector propio asociado a λ_i. Entonces, la función:

$$\Phi_A(t) = \begin{bmatrix} p_{11}e^{\lambda_1 t} & p_{12}e^{\lambda_2 t} & p_{13}e^{\lambda_3 t} & \cdots & p_{1n}e^{\lambda_n t} \\ p_{21}e^{\lambda_1 t} & p_{22}e^{\lambda_2 t} & p_{23}e^{\lambda_3 t} & \cdots & p_{2n}e^{\lambda_n t} \\ p_{31}e^{\lambda_1 t} & p_{32}e^{\lambda_2 t} & p_{33}e^{\lambda_3 t} & \cdots & p_{3n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}e^{\lambda_1 t} & p_{n2}e^{\lambda_2 t} & p_{n3}e^{\lambda_3 t} & \cdots & p_{nn}e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = Pe^{tD}. \tag{3.2}$$

es solución de la ecuación (3.1)*.*

Demostración. Al derivar y usar el Teorema 2.3 aplicado a D, se tiene que:

$$\Phi'_A(t) = (Pe^{tD})' = P(e^{tD})' = PDe^{-tD} = PDP^{-1}Pe^{-tD} = PDP^{-1}\Phi_A(t)$$

En la demostración del Teorema 2.3 se verificó la identidad

$$A = PDP^{-1}$$

y al insertarla en la ecuación precedente se obtiene $\Phi'_A(t) = A\Phi_A(t)$, lo cual concluye la demostración. □

La matriz $\Phi_A(t)$ definida recientemente se conoce como la **matriz fundamental** del sistema (1.1)

Definición 3.1. *Dada la matriz $\Phi_A(t)$ definida en* (3.2)*, denotaremos su i–ésima columna como:*

$$\Phi_i(t) = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}.$$

Corolario 5. *Para toda matriz cualquiera $M \in M_{nn}(\mathbb{R})$, se verifica que $\Psi_A(t) = \Phi_A(t)M$ es solución de la ecuación matricial (3.1).*

Demostración. Al derivar y usar el Teorema 3.1 se verifica que:

$$\Psi'_A(t) = \Phi'_A(t)M = A\Phi_A(t)M = A\Psi_A(t),$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Podemos concluir que la ecuación diferencial matricial (3.1) tiene inifinitas soluciones. Sin embargo, las matrices e^{tA} y $\Phi_A(t)$ serán muy utiles para resolver el sistema de ecuaciones (1.1). Finalmente, notemos que sólo e^{tA} es la única solución de:

$$\begin{cases} X'(t) &= AX(t) \\ X(0) &= I. \end{cases}$$

4. Estudio del sistema (1.1)

En esta sección estudiaremos el sistema (1.1)

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$$

y el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{x} &= A\vec{x} \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *La solución del problema de Cauchy* (4.1) *es la función $\vec{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por:*

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0.$$

Demostración. Usando (2.3), notemos que:

$$e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0 = e^{tA}e^{-t_0A}\vec{x}_0$$

Al derivar, observamos gracias a (2.13) que:

$$\left(e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0\right)' = \left(e^{tA}e^{-t_0A}\vec{x}_0\right) = \left(e^{tA}\right)'e^{-t_0A}\vec{x}_0 = Ae^{tA}e^{-t_0A}\vec{x}_0.$$

Usando una vez más (2.3), se tiene que:

$$\left(e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0\right)' = Ae^{tA}e^{-t_0A}\vec{x}_0 = Ae^{(t-t_0)A}\vec{x}_0,$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 1 Resolvamos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= 4x + 2y \\ y' &= 3x - y \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

Notemos que la matriz asociada a este sistema es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

vista en la sección anterior. Asimismo, sabemos que:

$$e^{tA} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, una consecuencia del Teorema 4.1 es que:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{10}{7}e^{5t} \\ \frac{9}{7}e^{-2t} + \frac{5}{7}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Lema 11. *Cada una de las funciones vectoriales $\Phi_i(t)$ descritas en la Definición* 3.1 *es una solución particular del sistema* (1.1).

Demostración. Notemos que:

$$\Phi_i'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_i p_{1i} \\ \lambda_i p_{2i} \\ \lambda_i p_{3i} \\ \vdots \\ \lambda_i p_{ni} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} = \lambda_i \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}.$$

Como λ_i es un valor propio de A y la i–ésima columna de P es un vector propio asociado a λ_i, se tiene que:

$$\Phi_i'(t) = \lambda_i \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} = A\Phi_i(t),$$

lo cual concluye la demostración. □

Una consecuencia importante de este Lema es que todas las columnas de la matriz $\Phi(t)$ son soluciones particulares del sistema (1.1).

Teorema 4.2. *El conjunto de soluciones del sistema lineal* (1.1) *formado por $\Phi_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) y $\vec{0}$ es un subespacio vectorial.*

Demostración. Claramente $\vec{0}$ es una solución del sistema (1.1). Ahora definamos:

$$v(t) = \Phi_i(t) + \Phi_j(t),$$

por el Lema anterior se tiene que

$$v'(t) = \Phi_i'(t) + \Phi_j'(t) = A\Phi_i(t) + A\Phi_j(t) = A\{\Phi_i(t) + \Phi_j(t)\} = Av(t).$$

Del mismo modo, sea $u(t) = \alpha\Phi_i(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando el Lema anterior se verifica:

$$u'(t) = \alpha\Phi_i'(t) = \alpha A\Phi_i(t) = A\alpha\Phi_i(t) = Au(t),$$

lo cual concluye la demostración. □

Teorema 4.3. *Las funciones $\Phi_i(t)$ con $i = 1, \ldots, n$ descritas por la Definición* 3.1 *son un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Dada la identidad:

$$\alpha_1\Phi_1(t) + \alpha_2\Phi_2(t) + \alpha_n\Phi_n(t) = 0,$$

tenemos que demostrar que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, reescribimos la identidad del modo siguiente:

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\vec{p}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\vec{p}_2 + \alpha_n e^{\lambda_n t}\vec{p}_n = 0, \tag{4.2}$$

donde:

$$\vec{p}_i = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix}.$$

Si evaluamos en $t = 0$, la identidad (4.2) se transforma en:

$$\alpha_1\vec{p}_1 + \alpha_2\vec{p}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{p}_n = 0.$$

Recordemos que los vectores $\vec{p}_i$ son vectores propios de A, si usamos la Proposición 2 del capítulo anterior se tiene que $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ es un conjunto linealmente indendiente, lo cual implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Lo cual concluye la demostración. $\square$

Una consecuencia es el siguiente resultado:

Corolario 6. *Toda solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{x} & = & A\vec{x} \\ \vec{x}(t_0) & = & \vec{x}_0 \end{cases}$$

puede escribirse como combinación lineal

$$\vec{x}(t) = c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) + \ldots + c_n\Phi_n(t)$$

y las constantes c_i $(i = 1, \ldots, n)$ son las soluciones del sistema lineal:

$$P\vec{c} = \vec{x}_0.$$

Demostración. Usando el Teorema 4.2, es fácil ver que $\vec{x}(t)$ es una solucón del sistema (1.1). Por otro lado, evaluamos en $t = 0$ y vemos que:

$$\vec{x}(0) = c_1\Phi_1(0) + \ldots + c_n\Phi_n(0) = P\vec{c} = \vec{x}_0$$

y por lo tanto, $\vec{x}(t)$ es solución del problema de Cauchy. $\square$

Ejemplo 2 Consideremos una vez más el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' & = & 4x + 2y \\ y' & = & 3x - y \\ x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2, \end{cases}$$

el cual resolveremos usando el Corolario 6.

Sabemos que los valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 5$. Sus vectores bases de vectores propios asociados son:

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, la solución del problema de Cauchy es combinación lineal de las funciones:

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{y} \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Para encontrar los valores de c_1 y c_2 evaluamos en $t = 0$ y usamos ma condición inicial, obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 &= 1 \\ -3c_1 + c_2 &= 2. \end{cases}$$

Resolvemos por regla de Cramer, obteniendo:

$$c_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-3}{7} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{5}{7}.$$

Luego reemplazamos y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{-3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{10}{7}e^{5t} \\ \frac{9}{7}e^{-2t} + \frac{5}{7}e^{5t} \end{pmatrix},$$

la cual coincide con el método anterior.

Ejemplo 3: Encontremos una base de soluciones pare el sistema:

$$\begin{cases} x' &= 3x + z \\ y' &= 9x - y + 2z \\ z' &= -9x + 4y - z, \end{cases}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 9 & -1-\lambda & 2 \\ -9 & 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1-\lambda \\ -9 & 4 & -1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Notemos que equivale a:

$$(3-\lambda)\{-(3-\lambda)(1+\lambda) - 4(1-\lambda)\} + 9(3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2).$$

Por lo tanto, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1 + i \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -1 - i.$$

Para calcular los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$, calculamos:

$$\begin{cases} 3x + z &= 3x \\ 9x - y + 2z &= 3y \\ -9x + 4y - z &= 3z \end{cases}$$

el cual equivale a:

$$\begin{cases} z &= 0 \\ 9x - 4y + 2z &= 0 \\ -9x + 4y - 4z &= 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene que $z = 0$ y que $9x = 4y$. Por lo tanto, todo vector propio asociado a 3 es un múltiplo del vector:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular los vectores propios asociados a $\lambda_2 = -1 + i$, calculamos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + z & = & (-1+i)x \\ 9x - y + 2z & = & (-1+i)y \\ -9x + 4y - z & = & (-1+i)z \end{array} \right.$$

el cual equivale a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (4-i)x + z & = & 0 \\ 9x - iy + 2z & = & 0 \\ -9x + 4y - iz & = & 0 \end{array} \right.$$

Como sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones, supondremos que $x = 1$. Eso implicará que:

$$z = -4 + i \quad \text{e} \quad y = \frac{9 + i(-4+i)}{4} = 2 - i.$$

El estudiante puede comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \\ -4+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a λ_2 (por favor verificar!!).

Para calcular los vectores propios asociados a $\lambda_2 = -1 - i$, calculamos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + z & = & (-1-i)x \\ 9x - y + 2z & = & (-1-i)y \\ -9x + 4y - z & = & (-1-i)z \end{array} \right.$$

el cual equivale a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (4+i)x + z & = & 0 \\ 9x + iy + 2z & = & 0 \\ -9x + 4y + iz & = & 0 \end{array} \right.$$

Como sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones, supondremos que $x = 1$. Eso implicará que:

$$z = -4 - i \quad \text{e} \quad y = \frac{9 - i(-4-i)}{4} = 2 + i.$$

Como antes, se puede comprobar que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ -4-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a λ_3

Por lo tanto, una base de soluciones esta formada por las funciones $\{\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t)\}$ descritas por:

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t},$$

$$\Phi_2(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{(-1+i)t}$$

Donde:

$$\operatorname{Re} \Phi_2(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) \right\} e^{-t}$$

e

$$\operatorname{Im} \Phi_2(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \sin(t) \right\} e^{-t}$$

$$\Phi_3(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{(-1-i)t}$$

El estudiante no tendrá dificultad en verficar que $\Phi_3(t)$ es el conjugado de $\Phi_2(t)$. Por lo tanto, podemos construir la base $\{U_1(t), U_2(t), U_3\}$ donde:

$$U_1(t) = \Phi_1(t), \quad U_2 = \frac{\Phi_2(t) + \Phi_3(t)}{2},$$

4.1. Equilibrios.

Definición 4.1. *El vector $\vec{x}^* \in \mathbb{R}$ es un **equilibrio** del sistema* (1.1) *si se verifica la ecuación:*

$$A\vec{x}^* = \vec{0}.$$

Notemos que si A es una matriz invertible, entonces, $\vec{x}^* = \vec{0}$ es el único equilbrio del sistema (1.1). Por otro lado, si A no es invertible, el sistema (1.1) tiene infinitos equlibrios.

4.2. Estabilidad del origen. Es fácil observar que el vector $\vec{0}$ es una solución particular del sistema (1.1). Esta solución será caracterizada en mas profundidad.

Definición 4.2. *El origen $\vec{0}$ es una solución particular:*

i) ***Estable*** *del sistema* (1.1) *para toda condición condicion inicial que satisface la desigual $||\vec{x}(0)|| < \delta$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la solución verifica $||\vec{x}(t)|| < \varepsilon$.*
ii) ***Asintóticamente estable*** *del sistema* (1.1) *si es estable y además toda solución particular $\vec{x}(t)$ del sistema* (1.1) *verifica la propiedad:*

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}.$$

iii) ***Inestable*** *del sistema* (1.1) *si es que no es estable.*

La estabilidad de la solución $\vec{0}$ es de gran importancia en ciencias experimentales. A continuación utilizamos el siguiente criterio de estabilidad:

Teorema 4.4. *Si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa, entonces el origen $\vec{0}$ es asintóticamente estable.*

Demostración. En primer lugar, sabemos que toda solución $\vec{x}(t)$ se escribe como combinación lineal de las funciones $\Phi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{p}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{p}_2 e^{\lambda_2 t} + c_n\vec{p}_n e^{\lambda_n t}. \tag{4.3}$$

Por otro lado, sabemos que:

$$e^{\lambda_k t} = e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda_k)t},$$

la cual satisface las desigualdades:

$$0 \leq |e^{\lambda_k t}| \leq e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}$$

puesto que (usar Fórmula de Euler) $|e^{\mathrm{Im}(\lambda_k t)}| < 1$.

Como $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ se tiene:

$$0 \leq \lim_{t\to+\infty} |e^{\lambda_k t}| \lim_{t\to+\infty} e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} = 0,$$

lo cual implica

$$\lim_{t\to+\infty} |e^{\lambda_k t}| = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_k t} = 0.$$

Ahora, aplicando las propiedades algebraicas de límite a (4.3) se tiene:

$$\lim_{t\to+\infty} = \sum_{k=1}^{n} c_k\vec{p}_k \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_k t} = \vec{0}.$$

□

4.3. Hiperbolicidad del origen. Ya sabemos que el vector $\vec{0}$ es una solución particular del sistema (1.1). Junto con la estabilidad, introducimos el siguiente concepto:

Definición 4.3. *El origen $\vec{0}$ es un equilibrio del sistema* (1.1) *de tipo:*

i) ***Hiperbólico*** *si todos los valores propios λ de la matriz A asociada al sistema* (1.1) *verifica la propiedad:*

$$\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0.$$

ii) ***No hiperbólico*** *si existe algún valor propio λ de la matriz A asociada al sistema* (1.1) *con la propiedad:*

$$\mathrm{Re}\,\lambda = 0.$$

El concepto de hiperbolicidad jugará un papel muy importante en el proximo capítulo.

5. Oscilador armónico amortiguado

Un objeto de masa m está sujeto a un resorte cuya constante de restitución es $k > 0$. El objeto se desaplaza a lo largo de un plano no inclinado con coeficiente de roce cinemático $c > 0$. Deseamos deducir el movimiento del objeto que resulta al desplazarlo de su posición de equilibrio.

Sea $x(t)$ el desplazamiento de el objeto respecto a la posición de equilibrio en el tiempo t:

- Usando la segunda ley de Newton, sabemos que la fuerza es la masa del objeto mutiplicada por su aceleración.

$$F = mx''(t).$$

- Por la ley de Hooke, sabemos que la fuerza es inversamente proporcional a la distancia de la posición de equilibrio y la constante de proporcionalidad es la constante de restitución k. Además la fuerza es inversamente proporcional a la velocidad y la constante de propicionalidad es el coeficiente de roce cinemático. Por lo tanto:

$$F = -cx'(t) - kx(t).$$

Al igualar las fuerzas, observamos que el desplazamiento del objeto viene descrito por la ecuación diferencial:

$$mx'' + cx' + kx = 0, \tag{5.1}$$

donde $m > 0$,$c > 0$ y $k > 0$.

El sistema puede ser reescrito de la forma:

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0, \tag{5.2}$$

Haremos el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Por lo tanto, usando (5.2) y (5.3), se tiene que $y' = x'' = -\frac{c}{m}x' - \frac{k}{m}x$ lo cual implica

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y, \end{cases}$$

el cual puede reescribirse de la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

El polinomio característico asociado al sistema (5.4) es

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \tag{5.5}$$

y sus raíces vienen dadas por:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{c^2}{4mk} - 1}$$

y

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{c^2}{4mk} - 1}.$$

Con los cambios de variable

$$\omega = \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}},$$

los valores propios pueden reescribirse como:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\frac{c}{2m} + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

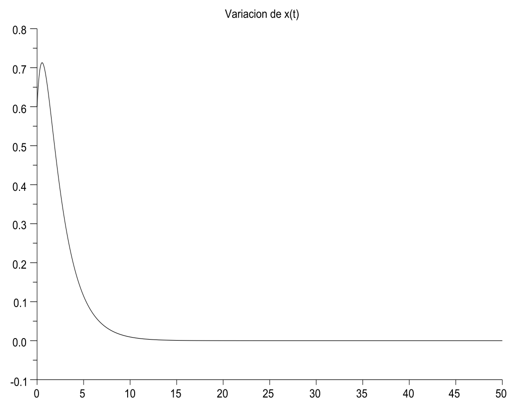

FIGURA 1. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador sobreamortiguado con $m = 2$,$k = 1{,}5$, $c = 4$, $x(0) = 0{,}6$ e $y(0) = 0{,}5$.

5.1. Caso de sobreamortiguamiento $\zeta > 1$. En este caso se tiene que el coeficiente de roce es menor a $2\sqrt{km}$, eso implica que los valores propios son reales negativos. Por lo tanto, el Teorema 4.4 implica que

$$\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que la convergencia es monótona.

Notemos que los valores propios asociados a λ_1 y λ_2 son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las soluciones particulares del sistema (5.4) son:

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Por lo tanto, toda solución del sistema (5.4) se puede escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

5.2. Caso de subamortiguamiento $2\sqrt{km} > c$. En este caso, se tiene que el coeficiente de roce es menor al umbral $2\sqrt{km}$, eso implica que los valores propios son complejos pues $c^2 - 4km < 0$. Por otro lado es fácil ver que ambos valores propios tienen parte real negativa. Por lo tanto, el Teorema 4.4 implica que

$$\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y que la convergencia es oscilatoria.

Como antes, las soluciones particulares del sistema (5.4) son:

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

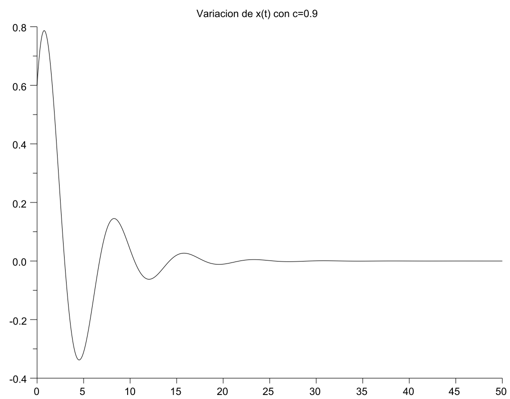

Figura 2. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador subamortiguado con $m = 2$,$k = 1{,}5$, $c = 0{,}9$, $x(0) = 0{,}6$ e $y(0) = 0{,}5$.

Notemos que $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, donde

$$\alpha = -\frac{c}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \omega\sqrt{1-\zeta^2}.$$

Por lo tanto $\Phi_1(t)$ y $\Phi_2(t)$ pueden reescribirse como:

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - i\beta \end{pmatrix} e^{\alpha t - i\beta t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)\} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)\} \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + i\beta \end{pmatrix} e^{\alpha t + i\beta t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)\} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)\}. \end{pmatrix}$$

Haremos los cambios de variable:

$$u_1(t) = \frac{\Phi_1(t) + \Phi_2(t)}{2} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)\} \end{pmatrix}$$

y

$$u_2(t) = \frac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{2i} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)\} \end{pmatrix}.$$

Como $\{u_1(t), u_2(t)\}$ es una base de soluciones, sabemos que toda solución del sistema (5.4) se escribe de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)\} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}\{\beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)\} \end{pmatrix}.$$

En las siguientes simulaciones numéricas, se va reduciendo el coeficiente de roce c y la solución va convergiendo de forma oscilatoria hacia $(0,0)$.

5.3. Caso no amortiguado $c = 0$. . En este caso los valores propios son

$$\lambda_1 = -i\sqrt{\frac{k}{m}} = -i\omega \quad \text{y} \quad \lambda_2 = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega.$$

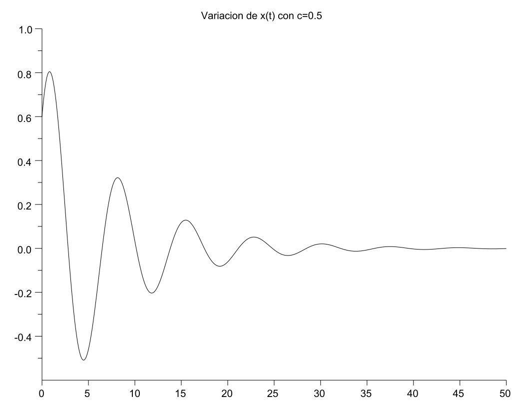

FIGURA 3. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador subamortiguado con $m = 2{,}k = 1{,}5,\ c = 0{,}5,\ x(0) = 0{,}6$ e $y(0) = 0{,}5$.

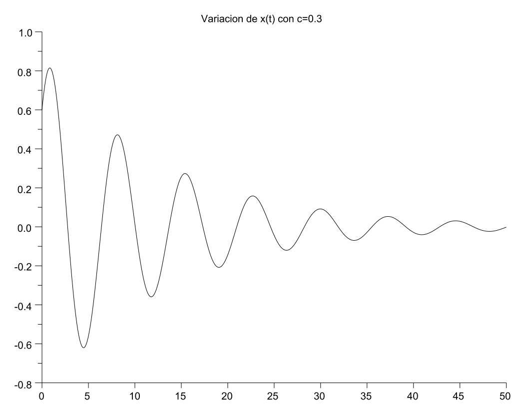

FIGURA 4. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador subamortiguado con $m = 2{,}k = 1{,}5,\ c = 0{,}3,\ x(0) = 0{,}6$ e $y(0) = 0{,}5$.

Es fácil verificar que los valores propios asociados a λ_1 y λ_2 son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

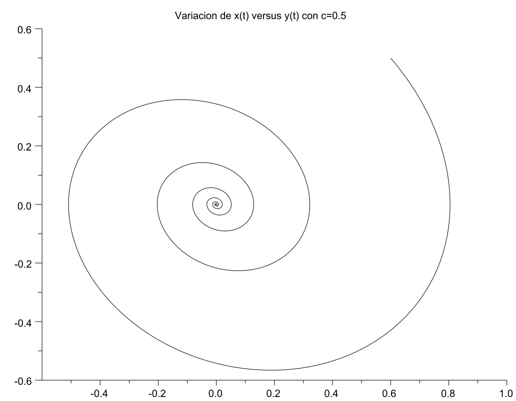

FIGURA 5. Componente $x(t)$ versus $y(t)$ de la solución del oscilador subamortiguado con $m = 2{,}k = 1{,}5$, $c = 0{,}5$, $x(0) = 0{,}6$ e $y(0) = 0{,}5$. Observe que las variables convergen al origen de forma oscilatoria.

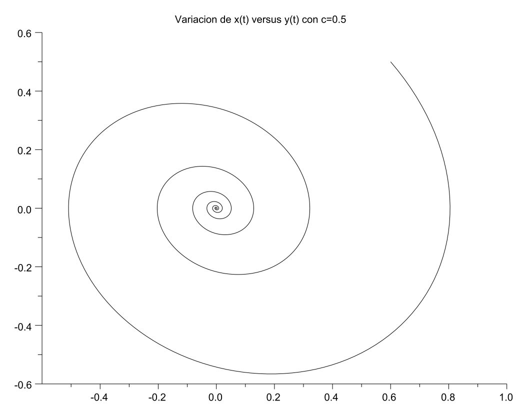

FIGURA 6. Componente $x(t)$ versus $y(t)$ de la solución del oscilador subamortiguado con $m = 2{,}k = 1{,}5$, $c = 0{,}3$, $x(0) = 0{,}6$ e $y(0) = 0{,}5$. Observe que las variables convergen al origen forma oscilatoria.

Como antes, tenemos una base de soluciones:

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

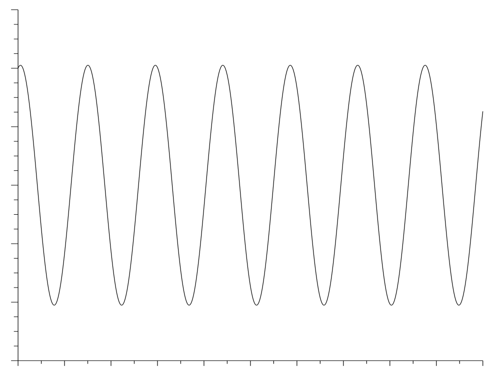

Figura 7. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador armónico con $m = 2$,$k = 1{,}5$, $c = 0$, $x(0) = 10$ e $y(0) = 0{,}5$.

y por lo tanto, toda solución del oscilador armónico no amortiguado se puede escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Es importante destacar que la solución de sistema es periódica con período $2\pi/\omega$. En efecto: es fácil notar que:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t+\frac{2\pi}{\omega}) \\ y(t+\frac{2\pi}{\omega}) \end{pmatrix}.$$

La frecuencia de la oscilación es ω y se la denomina como *frecuencia natural de oscilación.*

6. Sistemas no homogéneos

Estudiaremos el sistema (1.2)

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

o su reescritura como:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}. \tag{6.1}$$

El siguiente resultado será de gran utilidad:

Teorema 6.1. *Sea $\vec{x}_p(t)$ una solución particular del sistema* (6.1) *y consideremos a las columnas $\{\Phi_i(t)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ de la matriz fundamental correspondiente al sistema:*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Toda solución del sistema (6.1) *puede escribirse de la forma:*

$$\vec{x}(t) = c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) + \ldots + c_n\Phi_n(t) + x_p(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que:

$$\Big(c_1\Phi_1(t)+c_2\Phi_2(t)+\ldots+c_n\Phi_n(t)+x_p(t)\Big)' = \Big(c_1\Phi_1(t)+c_2\Phi_2(t)+\ldots+c_n\Phi_n(t)\Big)'+x_p'(t)$$

Usando el Teorema 4.2 y el hecho de que $\vec{x}_p(t)$ es una solución particular de (6.1), sabemos que esta expresión es equivalente a:

$$\begin{array}{rcl}\Big(c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) + \ldots + c_n\Phi_n(t) + x_p(t)\Big)' & = & A\Big(c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) + \ldots + c_n\Phi_n(t)\Big) + Ax_p(t) + f(t) \\ & = & A\Big(c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) + \ldots + c_n\Phi_n(t) + x_p(t)\Big) + f(t),\end{array}$$

lo cual concluye la demostración. □

En consecuencia, **sólo basta con encontrar una solución particular** $\vec{x}_p(t)$ para poder caracterizar a las soluciones del sistema (6.1). El siguiente resultado nos ayuda a encontrarla:

Teorema 6.2. *La función vectorial*

$$\vec{x}_p(t) = \Phi(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds$$

es una solución particular del sistema (6.1).

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, como las columnas de la matriz fundamental $\Phi(t)$ son linealmente independientes (ver Teorema 4.3), ahora derivamos y se obtiene:

$$\begin{array}{rcl}\vec{x}_p'(t) & = & \Phi'(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)f(t) \\ & = & \Phi'(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds + f(t)\end{array}$$

Usando el Teorema 3.1 podemos comprobar que la expresión es equivalente a

$$\begin{array}{rcl}\vec{x}_p'(t) & = & \Phi'(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)f(t) \\ & = & A\Phi(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds + f(t) \\ & = & \vec{x}_p(t) + f(t),\end{array}$$

por lo tanto, $\vec{x}_p(t)$ es una solución particular de (6.1), lo cual concluye la demostración. □

Un Corolario inmediato (y útil) es el siguiente:

Corolario 7. *Toda solución del sistema* (6.1) *puede escribirse de la forma:*

$$\vec{x}(t) = c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) + \ldots + c_n\Phi_n(t) + \Phi(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,ds,$$

donde $\{\Phi_i(t)\}$ *(*$i = 1,\ldots,n$*) son las columnas de la matriz fundamental correspondiente al sistema:*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Este resultado también puede extenderse de la forma siguiente:

Corolario 8. *Toda solución del sistema* (6.1) *puede escribirse de la forma:*

$$\vec{x}(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u(t) + \ldots + c_n u(t) + U(t) \int_a^t U^{-1}(s) f(s)\, ds,$$

donde $\{u_i(t)\}$ *(*$i = 1, \ldots, n$*) es una base de soluciones del sistema:*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

y las columnas de la matriz $U(t)$ *son las funciones* $u_i(t)$*.*

Ejemplo 1 Consideremos una vez más el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 4x + 2y - 15te^{-2t} \\ y' & = & 3x - y - 4te^{-2t} \\ x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & -1. \end{array} \right.$$

Sabemos que el sistema homogéneo asociado es:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 4x + 2y \\ y' & = & 3x - y, \end{array} \right.$$

cuya matriz fundamental tiene las columnas (ver el Ejemplo 2 de la sección 4 para los detalles del cálculo):

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{y} \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t},$$

y por lo tanto

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}$$

y

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{7} e^{-3t} \begin{bmatrix} e^{5t} & -2e^{5t} \\ 3e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una solución particular vendrá dada por:

$$\begin{array}{rcl} \vec{x}_p(t) & = & \Phi(t) \int_0^t \frac{1}{7} e^{-3s} \begin{bmatrix} e^{5s} & -2e^{5s} \\ 3e^{-2s} & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -15se^{-2s} \\ -4se^{-2s} \end{pmatrix} ds \\ & = & \Phi(t) \int_0^t \frac{1}{7} e^{-3s} \begin{pmatrix} -7se^{3s} \\ -49se^{-4s} \end{pmatrix} ds \\ & = & \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ -7se^{-7s} \end{pmatrix} ds \\ & = & \Phi(t) \begin{pmatrix} -\frac{s^2}{2} \\ se^{-7s} + \frac{1}{7} e^{-7s} \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{s=t} \\ & = & \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ te^{-7t} + \frac{1}{7} e^{-7t} - \frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{14} e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 + 28t - 7t^2 \\ 2 + 14t + 21t^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es decir, cualquier solución es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + \frac{1}{14} e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 + 28t - 7t^2 \\ 2 + 14t + 21t^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 & = & 1 \\ -3c_1 + c_2 & = & -1 \end{cases}$$

y puede deducirse que

$$c_1 = \frac{3}{7} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{2}{7}.$$

Ejemplo 2 Consideremos el oscilador armónico forzado sin roce:

$$x'' + \frac{k}{m}x = \sin(\phi t),$$

donde el objeto de masa m es forzado externamente de modo oscilatorio con frecuencia ϕ mientras que la *frecuencia natural de oscilación* es decor, la frecuencia de oscilación en ausencia de perturbaciones, es ω.

$$(6.2) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi t) \end{pmatrix}$$

Usando el Corolario 8 y los resultados del oscilador armónico sin roce, sabemos que toda solución se escribe de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} + U(t)\int_a^t U^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds.$$

Donde $U(t)$ y $U^{-1}(t)$ son las matrices:

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U^{-1}(t) = \frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} \omega\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

y $\vec{f}(t)$ es el vector:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi t) \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$U^{-1}(t)\vec{f}(t) = \frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} \omega\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t)\sin(\phi t) \\ \cos(\omega t)\sin(\phi t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\int_a^t U^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\int_a^t \sin(\omega s)\sin(\phi s)\,ds \\ \frac{1}{\omega}\int_a^t \cos(\omega s)\sin(\phi s)\,ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin([\omega+\phi]t)}{2\omega[\omega+\phi]} - \frac{\sin([\omega-\phi]t)}{2\omega[\omega-\phi]} + k_1 \\ \frac{\cos([\omega-\phi]t)}{2\omega[\omega-\phi]} - \frac{\cos([\omega+\phi]t)}{2\omega[\omega+\phi]} + k_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, toda solución será de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} + \vec{x}_p(t),$$

donde $\vec{x}(t)$ es de la forma:

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin([\omega+\phi]t)\cos(\omega t)}{2\omega[\omega+\phi]} + \frac{\sin(\omega t)\cos([\omega-\phi])}{2\omega[\omega-\phi]} + k_1\cos(\omega t) + k_2\sin(\omega t) \\ -\frac{\sin([\omega+\phi]t)\sin(\omega t)}{2[\omega+\phi]} + \frac{\cos(\omega t)\cos([\omega-\phi]t)}{2[\omega-\phi]} + k_1\omega\sin(\omega t) + k_2\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Notemos que si ϕ tiene un valor cercano a ω. Es decir, si la frecuencia ϕ de la perturbación es muy cercana a la frecuencia natural de oscilación, una mirada a los denominadores de la expresión muestra que a medida que ϕ tiende a ω, la amplitud de la oscilación aumenta.

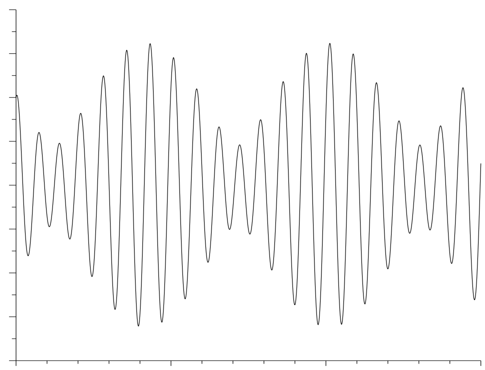

FIGURA 8. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador armónico forzado con $m = 2$,$k = 1{,}5$, $c = 0$, $x(0) = 10$ e $y(0) = 2$. Es decir $\omega = 0{,}86660254$ y $\phi = 0{,}8$

.

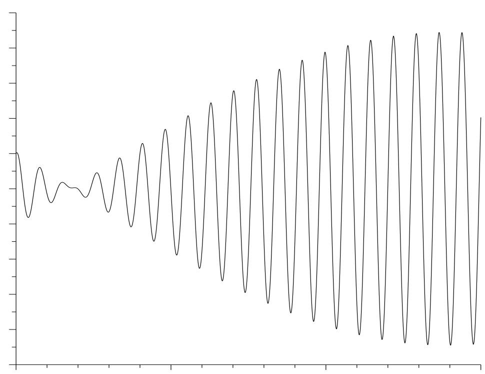

FIGURA 9. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador armónico forzado con $m = 2$,$k = 1{,}5$, $c = 0$, $x(0) = 10$ e $y(0) = 2$. Es decir $\omega = 0{,}86660254$ y $\phi = 0{,}84$

.

7. El caso no diagonalizable

Cuando la matrix $A \in M_{nn}\mathbb{R}$ no es diagonalizable tendremos $\ell < n$ vectores propios, lo cual impide construir una base de soluciones para el sistema lineal homogéneo (1.1).

En este curso sólo nos concentraremos en los casos $n = 2, 3$. Un estudio general exige el uso de la fórma canónica de Jordan.

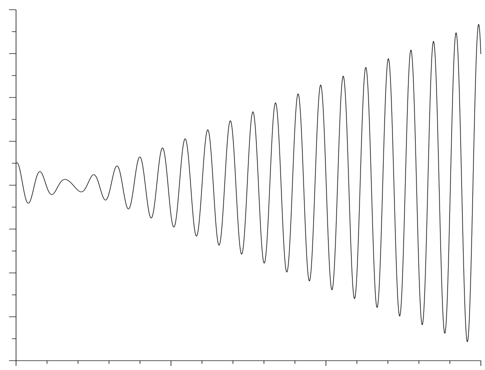

FIGURA 10. Componente $x(t)$ de la solución del oscilador armónico forzado con $m = 2$,$k = 1{,}5$, $c = 0$, $x(0) = 10$ e $y(0) = 2$. Es decir $\omega = 0{,}86660254$ y $\phi = 0{,}86$
.

7.1. El caso $n = 2$. Consideremos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \alpha x + \beta y \\ y' & = & \gamma x + \delta y. \end{array} \right. \tag{7.1}$$

donde la matriz asociada no es diagonalizable. En este caso tendremos un valor propio λ_1 de multiplicidad algebraíca 2 pero de multiplicidad geométrica 1. Por lo tanto, tenemos una solución del tipoI

$$u_1(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t},$$

donde $\vec{v}_1$ es un vector propio asociado al valor propio λ_1.

La idea para encontrar otra solución $u_2(t)$ tal que sea linealmente independiente con $u_1(t)$ será suponer que la *candidata a* solución $u_2(t)$ es de la forma siguente:

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} ae^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t} \\ ce^{\lambda_1 t} + dte^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

El objetivo es determinar si existen constantes a,b,c y d que permitan que $u_2(t)$ sea una solución del sistema (7.1), linealmente independiente de $u_1(t)$.

Si derivamos la ecuación (7.2), se tiene:

$$u_2'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a + b + \lambda_1 bt \\ \lambda_1 c + d + \lambda_1 dt \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}. \tag{7.3}$$

Por lo tanto, $u_2(t)$ será solución del sistema (7.1) si y sólo si:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a + b + \lambda_1 bt \\ \lambda_1 c + d + \lambda_1 dt \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} \{\alpha a + \beta c\} + \{\alpha b + \beta d\}t \\ \{\gamma a + \delta c\} + \{\gamma b + \delta d\}t \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

Por lo tanto, se tendrá que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda_1 a + b &= \alpha a + \beta c \\ \lambda_1 c + d &= \gamma a + \delta c \\ \lambda_1 b &= \alpha b + \beta d \\ \lambda_1 d &= \gamma b + \delta d, \end{cases}$$

donde las incógnitas son a,b,c y d.

Con el fin de aprender el procedimiento estudiaremos algunos ejemplos:
Ejemplo 1: Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x' &= 3x - 4y \\ y' &= x - y, \\ x(0) = -1 \quad \text{e} & y(0) = 1. \end{cases}$$

En primer lugar, es fácil notar que el polinomio característico de la matriz asociada al sistema es:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

y por lo tanto, la matriz tiene a $\lambda = 1$ como único valor propio (de multiplicidad algebraica igual a dos).

El estudiante puede comprobar que la multiplicidad geométrica igual a dos. En efecto, Todo vector propio asociado a $\lambda = 1$ es un múltiplo del vector:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El estudiante puede comprobar que:

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \vec{v}_1 e^t,$$

es una solución del sistema.

Ahora, consideraremos a

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^t,$$

como *canditata a* solución del sistema. Si comparamos las expresiones $u_2'(t)$ y $Au_2(t)$ veremos que son iguales si y sólo si:

$$= \begin{pmatrix} a + b + bt \\ c + d + dt \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 3a - 4c + \{3b - 4d\}t \\ a - c + \{b - d\} \end{pmatrix} e^t.$$

Lo cual es equivalente a los sistemas:

$$\begin{cases} a + b &= 3a - 4c \\ b &= 3b - 4d \\ c + d &= a - c \\ d &= b - d \end{cases}$$

o bien:

$$\begin{cases} 2a - b - 4c &= 0 \\ 2b - 4d &= 0 \\ a - 2c - d &= 0 \\ b - 2d &= 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que la segunda fila es múltiplo de la cuarta fila. Por lo tanto, sabemos que

$$b = 2d.$$

Si elegimos $d = 1$, entonces se tiene $b = 2$, mientras que a y c son soluciones del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a - 4c & = & 2 \\ a - 2c & = & 1. \end{array} \right.$$

Como ambas filas son equivalentes, sabemos que $a - 2c = 1$. Por lo tanto, si elegimos $a = 1$, se tiene que $c = 0$. Por lo tanto, sabemos que:

$$u_2(t) = \left(\begin{array}{c} 1 + 2t \\ t \end{array} \right) e^t$$

es una solución del sistema.

Para comprobar que $u_1(t)$ y u_2 son linealmente independientes calculamos el determinante:

$$\det \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 + 2t \\ 1 & t \end{array} \right] = 2t - 1 - 2t = -1 \neq 0.$$

Como $\{u_1(t), u_2(t)\}$ es una base de soluciones. El Corolario 8 dice que toda solución se escribe de la forma:

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = c_1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) e^t + c_2 \left(\begin{array}{c} 1 + 2t \\ t \end{array} \right) e^t.$$

Para encontrar las constantes c_1 y c_2, recordemos las condiciones iniciales:

$$\left(\begin{array}{c} x(0) \\ y(0) \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} 2c_1 + c_2 \\ c_1 \end{array} \right. = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right).$$

Por lo tanto, la solución del problema de Cauchy viene dada por:

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) e^t + 3 \left(\begin{array}{c} 1 + 2t \\ t \end{array} \right) e^t.$$

Un comentario muy importante es el siguiente: observemos que la solución $u_2(t)$ es de la forma

$$u_2(t) = \left(\begin{array}{c} 1 + 2t \\ t \end{array} \right) e^t = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) e^t + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) te^t = (\vec{w} + \vec{v}_1 t)e^t,$$

donde $\vec{v}_1$ es un vector propio asociado a $\lambda = 1$.

El siguiente resultado ayudará a generalizar esta idea:

Teorema 7.1. *Si la matriz A asociada al sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha x + \beta y \\ y' & = & \gamma x + \delta y. \end{array} \right.$$

no es diagonalizable (tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraíca 2 y multiplicidad geométrica 1 donde $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$). Entonces, toda solución es de la forma:

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t). \tag{7.4}$$

donde

$$u_1(t) = \vec{v}e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad u_2(t) = (\vec{w} + t\vec{v})e^{\lambda t}.$$

Donde el vector $\vec{w}$ y el valor propio $\vec{v}$ satisfacen la propiedad:

$$(A - \lambda I)\vec{w} \;\; = \;\; \vec{v} \tag{7.5}$$

y en vector $\vec{w}$ es escogido de tal forma que $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil demostrar que $u_1(t)$ es una solución del sistema (la demostración es análoga a la del Lema 11). A continuación demostraremos que $u_2(t)$ es una solución del sistema $x' = Ax$. En fecto, notemos que

$$u_2'(t) = \lambda(\vec{w} + t\vec{v})e^{\lambda t} + \vec{v}e^{\lambda t} = (\lambda\vec{w} + t\lambda\vec{v} + \vec{v})e^{\lambda t}.$$

Como $\vec{v}$ es un vector propio asociado a λ, se tiene que:

$$u_2'(t) = (\lambda\vec{w} + tA\vec{v} + \vec{v})e^{\lambda t} = (\lambda\vec{w} + tA\vec{v} + \vec{v})e^{\lambda t}.$$

Por otro lado, la propiedad 7.5 implica:

$$u_2'(t) = (\lambda\vec{w} + tA\vec{v} + A\vec{w} - \lambda\vec{w})e^{\lambda t} = A(\vec{w} + t\vec{w})e^{\lambda t} = Au_2(t).$$

Por otro lado, si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son linealmente independientes. El Corolario 8 afirma que toda solución de la forma (7.4), lo cual concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 2: Consideremos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x - 3y \\ y' & = & 3x + 7y, \\ x(0) = -1 & \text{e} & y(0) = 1. \end{array}\right.$$

En primer lugar, es fácil notar que el polinomio característico de la matriz asociada al sistema es:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$$

y por lo tanto, la matriz tiene a $\lambda = 4$ como único valor propio (de multiplicidad algebraica igual a dos).

El estudiante podrá verificar sin gran dificultad que todos los vectores propios son múltiplos del vector

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto, se tiene que

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Si consideramos el vector

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

podemos observar que la ecuación (7.5) es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3w_1 + 3w_2 & = & 1 \\ 3w_1 + 3w_2 & = & -1y \end{array}\right.$$

y se tiene que $-w_1 + w_2 = \frac{1}{3}$. Por lo tanto elegimos un vector $\vec{w}$ de la forma:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Luego, se tiene que

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t - \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{4t}.$$

también es una solución particular del sistema.

Notemos que u_1 y u_2 son linealmente independientes. En efecto

$$\det \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & -t - \frac{1}{3} \end{bmatrix} = -t - \frac{1}{3} + t = -\frac{1}{3} \neq 0.$$

Entonces, toda solución se escribe de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -t - \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{4t}.$$

8. Bibliografia adicional

El lector puede consultar el Capítulo 5 de [**5**], donde el método de valores y vectores propios se aplica a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. El caso no homogéneo se explica muy bien en la sección 6.9 de [**12**]. El capítulo 5 de [**17**] contiene un buen estudio acerca de las propiedades de e^{tA} y propone métodos alternativos para resolver sistelas lineales.

9. Ejercicios

1.- Encuentre la matriz fundamental y la solución general para los siguientes sistemas:

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x, \quad x' = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} x, \quad x' = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x,$$

$$x' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} x, \quad x' = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x, \quad x' = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} x.$$

2.- Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable tal que sus valores propios son $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ (posiblemente algunos son iguales). Si la parte real de todos estos valores propios es menor que cero y $x(t)$ es una solución cualquiera de

$$x' = Ax$$

que puede decirse acerca de

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)?$$

Ayuda: los resultados teóricos vistos en clase debiesen ayudar.

3.- Resuelva la ecuación diferencial de orden dos:

$$x'' - 2x' + x = 0$$

con $x(0) = -2$ y $x'(0) = 3$.

4.- Resuelva la ecuación diferencial de orden dos:

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

con $x(0) = 1$ y $x'(0) = 2$.

5.- Resuelva el sistema:

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} x, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0.$$

6.- Sea $A \in M_{nn}\mathbb{R}$ una matriz diagonalizable tal que todos sus valores propios λ verifican la propiedad $|\lambda| < 1$. Verifique que

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$$

donde 0 es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son cero.

7.- Resuelva la ecuación diferencial de orden tres:

$$x''' + x'' - x' + 2x = 0$$

con $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$ y $x''(0) = 0$.

8.- La variación de la corriente electrica en un circuito RLC es descrita por la ecuación diferencial:

$$LI'' + RI + \frac{1}{C}I = 0 \tag{9.1}$$

donde I representa la corriente eléctrica, $L > 0$ es la inductancia, $R > 0$ es la resistencia y $C > 0$ es la capacidad del condensador.

i) Escriba la ecuación diferencial (9.1) como un sistema de ecuaciones diferenciales.

ii) Resuelva el sistema considerando las condiciones iniciales:

$$I(0) = 1Amp \quad \text{y} \quad I'(0) = 1Amp/Seg.$$

distinguiendo los casos: $R^2 > 4(L/C)$ y $R^2 < 4(L/C)$. Calcule

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = 0$$

en ambos casos.

iii) Repita el ejercicio anterior considerando $R^2 = 4(L/C)$.

En los problemas siguientes encuentre una solución de los sistemas no homogeneos

$$x' = Ax + b(t)$$

con las siguientes matrices A y funciones $b(t)$.

9.- Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 4e^t \end{bmatrix}$$

10.-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \end{bmatrix}$$

11.-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$$

12.-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^t \end{bmatrix}$$

13.-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix}$$

14.-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 4\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

15.- Considere los sistemas $x' = Ax$ y encuentre la matriz fundamental:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

16.- Considere los sistemas $x' = Ax$ y encuentre la matriz fundamental:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

17.- Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix}$$

18.- Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 5t \end{pmatrix}$$

19.- Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

20.- Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^{-2} \\ t^{-3} \end{pmatrix}$$

21.- Encuentre e^{tA} para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

este es un ejemplo donde el uso de la defínción por series resulta más fácil.

Anexo 1: Scilab

SCILAB es un programa de cálculo numérico desarrollado por el INRIA[1]. Es un programa de difusión no comercial, el cual puede descargarse gratuitamente en el sitio:

www.scilab.org

Ecuaciones diferenciales

Veremos ejemplos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, en el caso de la ecuación logística:

$$\begin{cases} p' &= rp(1-p/K) \\ p(0) &= 0{,}15 \end{cases}$$

con parámetros $r = 0{,}5$ y $K = 4$, veremos que se resuelve mediante la instrucción:

```
deff('dy=fct(t,y)','dy(1)=0.5*y(1)-((0.5)/4)*y(1)*y(1)')\\
t0=0 ; y0=[0.15]; t=0 :0.1 :100;\\
z=ode(y0,t0,t,fct);\\
plot2d(t,z(1,:))\\
xtitle('Solucion ecuacion logistica')\\
```

La instrucción ode es de tipo *caja negra* y requiere de cuatro argumentos: la condición inicial y_0, el tiempo inicial t_0, los instantes de cálculo de la solución y la función fct que define la ecuación.

Matrices

Consideremos la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

esta se define en SCILAB como:

```
T=[2,-1;2,5]
```

Algebra lineal	SCILAB
Determinante de T	det(T)
Valores propios de T	spec(T)
inversa de T	inv(T)
Polinomio característico de A	poly(A,'s')

Es fácil ver que los valores propios de T, se calculan con la instrucción:

```
spec(T)
```

[1]Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique (Francia) www.inria.fr

la cual arroja la respuesta 3 y 4.

Regla de Cramer

10. Preliminares

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & \alpha \\ cx+dy & = & \beta. \end{array} \right. \tag{10.1}$$

El cual puede ser escrito matricialmente:

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right). \tag{10.2}$$

En el curso de matemáticas III, resolvimos este sistema mediante el proceso de eliminacin gaussiana. Es decir. multplicamos la fila 1 por c y multiplicamos la fila 2 por $-a$, obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} acx+bcy & = & \alpha c \\ -acx-ady & = & -\beta a. \end{array} \right.$$

Sumamos ambas filas y se obtiene:

$$-(ad-bc)y = \alpha c - \beta a,$$

y despejando concluímos que

$$y = \frac{a\beta - c\alpha}{ad-bc}.$$

De (10.1) sabemos que

$$x = \alpha - by = \frac{\alpha}{a} - b\frac{a\beta - c\alpha}{a(ad-bc)} = \frac{\alpha ad - \alpha bc - ba\beta - bc\alpha}{a(ad-bc)} = \frac{\alpha d - \beta b}{ad-bc}.$$

11. Regla de Cramer

Usando determinantes, una forma alternativa de realizar este cálculo es utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\det \left[\begin{array}{cc} \alpha & b \\ \beta & d \end{array} \right]}{\det \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]} = \frac{\alpha d - \beta b}{ad-bc}$$

e

$$y = \frac{\det \left[\begin{array}{cc} a & \alpha \\ c & \beta \end{array} \right]}{\det \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]} = \frac{a\beta - c\alpha}{ad-bc}.$$

Es bueno que el estudiante conozca varios métodos de solución de sistemas lineales. En el caso $2x2$ la regla de Cramer puede ser de utilidad.

Bibliografía

[1] T. Apostol. *Calculus* Editorial Reverté, Barcelona, 1996.

[2] F. Arenas, G. Masjuan, F. Villanueva. *Algebra, Números complejos.* Central de Publicaciones, Pontificia Universidad Católica, 1988, Santiago.

[3] R.V. Churchill, J.W. Brown. *Variable Compleja y Aplicaciones*, Mc Graw–Hill, Madrid, 1986.

[4] P. Dartnell, E. Goles, A. Maass, J. San Martin. *Álgebra*, Publicación MA–99–D–468, Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile, 1999.

[5] Ch. Edwards, D.E. Penney. *Ecuaciones Diferenciales Elementales*, Prentice Hall.

[6] E. Goles. *Álgebra*, Ediciones Dolmen, Santiago, 1993.

[7] G.H. Hay. *Vector & Tensor Analysis*, Dover, New York, 1953.

[8] A.A. Hauser. *Variable Compleja*, Fondo Educativo Interamericano, 1973.

[9] K. Hoffman, R. Kunze. *Álgebra Lineal*, Prentice Hall, Madrid, 1973.

[10] Ch. H. Lehmann. *Geometría Analítica*, Editorial Limusa, México, 1986.

[11] L. Leithold. *El Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Harla, México, 1972.

[12] A.L. Rabenstein. *Ecuaciones Diferenciales Elementales con Algebra Lineal.* CECSA, México, 1973.

[13] A. Robledo. *Lecciones de Algebra Elemental Moderna.* Universidad de Concepción. 1973.

[14] C. Pita. *Cálculo Vectorial*, Prentice–Hall, México, 1995.

[15] G.F. Simmons, S.G. Krantz. *Ecuaciones diferenciales, Teoría, técnica y práctica.* Mc Graw–Hill, 2007.

[16] I.S. Sokolnikoff, E.S. Sokolnikoff. *Higher Mathematics for Engineers and Physicists.* Mc Graw–Hill, New York, 1941.

[17] D.M. Wiberg. *Espacio de Estado y Sistemas Lineales.* Serie Schaum. Mc Graw–Hll, Bogotá, 1971.

[18] A.D. Wunsch. *Variable Compleja con Aplicaciones.* Addison–Wesley Iberoamericana, 1997.