Primera guía de ejercicios y tarea.
Estructuras algebraicas. Segundo semestre 2012

Los ejercicios marcados con $*$ deberán entregarlos resueltos el viernes 17 de agosto. Se permite el trabajo en grupos de 2 o 3 personas (entregan una tarea). La nota de la tarea se compondrá de tres partes. Una nota por la entrega de la tarea donde se evaluarán la puntualidad, la completitud y el orden. En segundo lugar se corregirá uno de los problemas entregados. Finalmente habrá un control durante la ayudantía en que se les pedirá resolver otro de los problemas (sin mirar la solución entregada) con el fin de asegurar que todos los integrantes del grupo saben resolver los problemas. El promedio de estas 3 notas será la nota para la tarea.

1. * Escriba los axiomas de Peano (puede buscarlos en Internet si no los conoce) y use la definición recursiva de la suma de números naturales vista en clases para demostrar que la suma es asociativa y conmutativa.

2. Defina el producto de números naturales de forma recursiva y demuestre que es asociativo y conmutativo.

3. * Demuestre que si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

4. Demuestre que en $N \times N$ la relación $(n, m) \sim (p, q) \Leftrightarrow n+q = m+p)$ es una relación de equivalencia.

5. Considere el conjunto $\frac{N\times N}{\sim}$ de las clases de equivalencia definidas por la relación $\sim$ se define la operaci'on $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d})$. Demuestre que esta operación está bien definida.

6. Explique como se puede identificar $\frac{N\times N}{\sim}$ con el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros que conoce. De ahora en adelante llamaremos $\mathbb{Z}$ a este conjunto.

7. * Demuestre que la operación definida en el ejercicio 5 es una operación asociativa y conmutativa

8. Demuestre que la operación definida en el ejercicio 5 tiene elemento neutro y cada elemento del conjunto tiene un elemento inverso.

9. * En $\mathbb{Z}$ se define una nueva operación:
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{ac} + \mathbf{bd}, \mathbf{ad} + \mathbf{bc}).$$
Demuestre que esta operación está bien definida en $\mathbb{Z}$.

10. Demuestre que la operación definida en el ejercicio 9 es una operación asociativa y conmutativa.

11. * Demuestre que la operación definida en el ejercicio 9 tiene elemento neutro pero no todos los elementos del conjunto tienen un elemento inverso. ¿Cuáles elementos son invertibles?