Capitulo 7:
Guías de onda, cavidades resonantes y conductores

En este capítulo discutiremos otra aplicación a la soluciones de onda de las ecuaciones de Maxwell.

Índice

1. Guía de ondas **3**
1.1. Modo electromagnético transversal (TEM) 5
1.2. Otros modos de propagación 6
1.3. Modo magnético transversal (TM) 6
1.3.1. Ejemplo: Modo TM en una guía rectangular 7
1.4. Modo eléctrico transversal (TE) 7
1.5. Método de solución 7

2. Guía de ondas dieléctricas **8**

3. Cavidades resonantes **10**

4. Atenuación de la energía debido a conductores imperfectos **10**

5. Propagación en conductores **12**

1. Guía de ondas

Hasta ahora hemos trabajado con situaciones donde el material tiene dimensiones $L >> \lambda$ y cuando no se satisface esta condición, asumimos una interfase discontinua. En situaciones donde la dimensión del material tiene una dimensión comparable a la longitud de onda, tenemos un problema de guía de ondas y la geometría precisa debe ser tomada en cuenta.

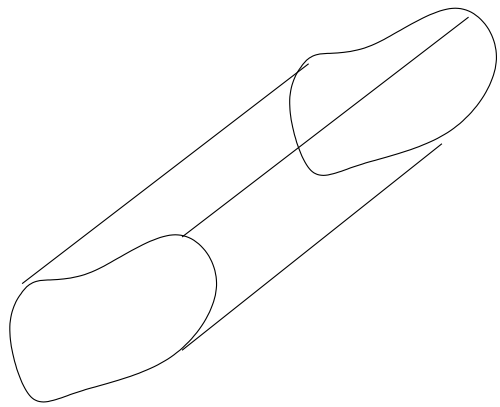

Figura 1: Guia de onda

Tomemos una guía de ondas uniforme en la dirección z, y veamos cuales perturbaciones pueden propagarse a lo largo de este eje. Si la guía de onda tiene una pared conductora perfecta, entonces las cargas dentro del conductor se moverán muy rápido para generar cargas dependientes del espacio y del tiempo y densidades de corriente en su superficie para ajustar las condiciones límite, dando

$$n \times E = 0 \quad \rightarrow \quad n \cdot B = 0$$

Para superficies razonables, tenemos un problema de valor propio que se puede resolver con una separación de variables. En geometrías más complejas, la solución da perfiles con interesantes (denominado caós cuántico) dentro del área de la guía, ya que diferentes partes del borde contribuyen con funciones propias no estándares. Esta es un área extensiva de investigación con implicaciones en caos cuántico, etc.

Asumamos que $P \rightarrow \lambda_\epsilon E + P$ y $M \rightarrow \lambda_\mu B + M$, con lo que separamos la parte constante de la dependiente de los campos. Usando $\nabla_t = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y$, $\nabla = \nabla_t + \hat{z}\partial_z$, $\nabla_t^2 = \nabla^2 + \partial_z^2$ en cartesianas. Las ecuaciones de Maxwell nos dan

$$\nabla_t \cdot E_t + \partial_z E_z = -\frac{4\pi}{\epsilon}\left[\nabla \cdot P\right] \qquad \nabla_t \cdot B_t + \partial_z B_z = 0$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \times B + \epsilon\mu\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi\mu\left[\nabla \times M - \frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial t}\right]$$

donde asumimos que no hay cargas ni corrientes dentro de la guía. Notemos que si P o M dependen de los campos en una forma no-lineal, entonces una expansión temporal de Fourier no tiene sentido.
Si asumimos que la parte no-lineal de $P = M = 0$ y una onda armónica, con $k_o = \omega/c$, dada por

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \left[E_z(x,y,z)\hat{z} + \vec{E}_t(x,y,z)\right] e^{-i\omega t}$$
$$\vec{B}(x,y,z,t) = \left[B_z(x,y,z)\hat{z} + \vec{B}_t(x,y,z)\right] e^{-i\omega t}$$

podemos utilizar

$$\nabla_t \cdot E_t + \partial_z E_z = 0 \qquad \nabla_t \cdot B_t + \partial_z B_z = 0$$
$$\nabla \times E - ik_o B = 0 \qquad \nabla \times B + i\epsilon\mu k_o E = 0$$

Hemos asumimos que el medio ϵ y μ es linear y no depende del espacio. La ecuación de onda es entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \nabla_t^2 E &= -k_o^2 \mu\epsilon E \\ \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \nabla_t^2 B &= -k_o^2 \mu\epsilon B \end{aligned} \tag{1}$$

Usando las ecuaciones de Maxwell tenemos

$$\left[\partial_z + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -ik_o \\ 0 & 0 & ik_o & 0 \\ 0 & in^2 k_o & 0 & 0 \\ -in^2 k_o & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x E_z \\ \partial_y E_z \\ \partial_x B_z \\ \partial_y B_z \end{bmatrix}$$

Hemos definido $n^2 = \epsilon\mu$. Ahora, dado que tenemos uniformidad en la dirección z, podemos expandir en ondas que se propagan a lo largo de la guía de onda para la frecuencia ω,

$$\vec{E}(x,y,z,\omega) = \left[E_z(x,y)\hat{z} + \vec{E}_t(x,y)\right] e^{ikz-i\omega t}$$
$$\vec{B}(x,y,z,\omega) = \left[B_z(x,y)\hat{z} + \vec{B}_t(x,y)\right] e^{ikz-i\omega t}$$

Notemos que aquí estamos asumiendo que la guía es uniforme en z, su sección no cambia en z. Con esto estamos estudiando la propagación de cada modo ω. En la practica uno envía un "wavepacket" y ve su efecto en la guía de ondas sumando apropiadamente su efecto

$$E(x,y,z,t) = \sum_\omega \vec{E}(x,y,z,\omega) e^{ikz-i\omega t}$$

donde la función de dispersión nos da $k(\omega)$. Tenemos que determinar las componentes del campo y los modos de propagación definidos por $k(\omega)$. Usando Eq. 2, tenemos

$$\begin{bmatrix} ik & 0 & 0 & -ik_o \\ 0 & ik & ik_o & 0 \\ 0 & in^2k_o & ik & 0 \\ -in^2k_o & 0 & 0 & ik \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x E_z \\ \partial_y E_z \\ \partial_x B_z \\ \partial_y B_z \end{bmatrix}$$

El determinante de esta matriz A es

$$Det[A] = (k^2 - n^2k_o^2)^2$$

y su inverso en caso que el $Det[A] \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2k_o^2 - k^2} \begin{bmatrix} ik & 0 & 0 & ik_o \\ 0 & ik & -ik_o & 0 \\ 0 & -in^2k_o & ik & 0 \\ in^2k_o & 0 & 0 & ik \end{bmatrix}$$

Notemos que hemos usado

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{n^2k_o^2 - k^2} \left[ik_o\hat{z} \times \nabla_t B_z + \nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] \\ B_t &= \frac{1}{n^2k_o^2 - k^2} \left[-in^2k_o\hat{z} \times \nabla_t E_z + \nabla_t \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

Es claro que si sabemos E_z y B_z, entonces conoceremos el resto de los componentes. Este problema es un problema del valor propio con $k(\omega)$ como su valor propio. Por lo tanto, sólo unas pocas frecuencias son permitidas para propagar a través de la línea. Por lo tanto, el campo de propagación está definido en la mayoría de los casos por las condiciones de la componente z y sus condiciones límite, las cuales dependen de la geometría particular.

Qué cambiaría si $n(x)$?

1.1. Modo electromagnético transversal (TEM)

El caso especial de un modo electromagnético transversal $E = E_t$ y $B = B_t$ es un caso degenerado, con la solución

$$\left. \begin{aligned} \nabla_t \times E_t = 0 \\ \nabla_t \cdot E_t = 0 \end{aligned} \right\} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} k^2 &= n^2k_o^2 \\ B_t &= \frac{k}{|k|} n\hat{z} \times E_t \end{aligned}$$

ya que el determinante debe ser singular. Este es un problema electrostático, por lo tanto no hay solución dentro de un conductor perfectamente hueco. Es necesario tener dos o más superficies. Esto es relevante en aplicaciones como cables coaxiales y paralelos para comunicación. El número de onda es real para todas las frecuencias y se propaga a la velocidad de la luz en el medio.

1.2. Otros modos de propagación

En líneas de transmisión hay dos condiciones límite relevantes

$$\begin{aligned} n \times E = 0 \quad &\rightarrow \quad E_z|_S = 0 \\ n \cdot B = 0 \quad &\rightarrow \quad \partial_n \, B_z|_S = 0 \end{aligned}$$

Es importante darse cuenta por que estamos usando estas condiciones de borde. La última expresión se obtiene de la matriz multiplicando $\hat{n} \cdot \nabla_t B_z$. Por lo tanto tenemos dos modos independientes de propagación, los cuales corresponden a dos problemas de valores propios independientes: los modos TE (eléctrico transversal) y el TM (magnético transversal). Ambos se propagan para frecuencias diferentes, ya que dan origen a diferentes problemas de valor propio con condiciones de borde.

$$\begin{aligned} TM \quad B_z = 0 \quad &\rightarrow \quad E_z|_S = 0 \\ ET \quad E_z = 0 \quad &\rightarrow \quad \partial_n \, B_z|_S = 0 \end{aligned}$$

En pocas palabras, las dos soluciones son consideradas como dos soluciones linealmente independientes. El sistema de todas las formas de posibles soluciones forman un set completo sistema que puede ser usado para expandir la propagación general de la forma de la onda a lo largo de la guía de onda.

$$E(x, y, z, t) = \sum_{\omega, TEM, TE, TM} \vec{E}(x, y, z, \omega) e^{ikz - i\omega t}$$

1.3. Modo magnético transversal (TM)

En el modo magnético transversal, debemos reforzar que $B_z(x, y) = 0$ en cualquier lado, y $E_z|_S = 0$.
En esta situación que tenemos, usamos Z como la impedancia de la onda

$$\begin{aligned} Z = \frac{|k|}{k_o} \frac{1}{\varepsilon} \qquad & \qquad \vec{H}_t = \frac{k}{|k|} \frac{1}{Z} \hat{z} \times \vec{E}_t \\ & \rightarrow \\ \gamma^2 = n^2 k_o^2 - k^2 \qquad & \qquad \vec{E}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t E_z \end{aligned}$$

de las cuales obtenemos la siguiente ecuación para E_z

$$\left(\nabla_t + \gamma^2\right) E_z = 0 \qquad E_z|_S = 0$$

Notemos que esto es la onda natural para definir la impedancia de onda Z. En circuitos teníamos una relación entre $V = ZI$, y por lo tanto la correspondiente relación es entre E y H, lo cual tiene sentido dimensional. También notemos que Z es una función de la frecuencia, el medio y las condiciones límite.

1.3.1. Ejemplo: Modo TM en una guía rectangular

Tenemos

$$E_z^{(n,m)}(x,y) = E_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \rightarrow \quad n^2k_o^2 - k^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

y notando que

$$\gamma^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

Contiene información acerca de la geometría del sistema. La solución es $k(\omega)$ como una onda de una frecuencia dada excitada, y estamos interesados en ver si la respuesta se puede propagar o no. Por lo tanto, hay una frecuencia de corte

$$k^2 = n^2\frac{\omega_c^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

entonces eso para $\omega > \omega_c$ la onda se propaga, y por bajo de esto no. La velocidad de fase de la onda se convierte infinita en el corte y se aproxima a la velocidad de la luz en frecuencias altas.

1.4. Modo eléctrico transversal (TE)

En el modo eléctrico transversal, tenemos $E_z(x,y) = 0$ en cualquier lado y $\partial_n H_z|_S = 0$.
En esta situación tenemos, usando Z como la impedancia de la onda

$$\begin{aligned} Z &= \frac{|k|}{k_o}\frac{1}{\varepsilon} \\ \gamma^2 &= n^2k_o^2 - k^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{H}_t &= \frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t H_z \\ \vec{E}_t &= \frac{k}{|k|}\frac{1}{Z}\hat{z}\times\vec{H}_t \end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación para H_z

$$(\nabla_t + \gamma^2)H_z = 0 \qquad \partial_n H_z|_S = 0$$

1.5. Método de solución

La ecuación $(\nabla_t + \gamma^2)E_z = 0$ es realmente un problema de valor propio formulado como una ecuación de onda, la cual en geometrías simples puede ser resuelto por separación de variables dando una función especial que habíamos estudiado antes.

Para una situación más general (donde la geometría no es tan simple), vamos a necesitar resolver el problema usando una técnica numérica avanzada (véase recetas numéricas) que las que hemos estudiado acá. Recuerde que la propagación es posible sólo para valores $\gamma^2 > 0$.
Para propagaciones de pulsos más generales (no sólo una onda plana), o con la presencia de obstáculos en la guía, el mismo análisis puede ser hecho pero con una superposición de ondas. He aquí lo completo de usar los modos TM y TE.

Es interesante notar que la ecuación final es muy similar a la ecuación de Schoringer de la mecánica cuántica para la simple condición límite de un potencial infinito en las paredes. Por lo tanto las situaciones experimentales naturales de la mecánica cuántica, por ejemplo la estadística de los niveles de energía o los modos, pueden ser estudiados usando guías de ondas. Para un potencial más general un índice de refracción complejo puede ser incluido en la guía (para un dieléctrico y un conductor), y situaciones límite mas generales (no del potencial infinito) pueden ser realizados con guías de onda dieléctricas.

2. Guía de ondas dieléctricas

En las guías de ondas dieléctricas debemos resolver el problema general de propagación, pero en dos regiones, dentro con ε_i, y fuera con $\varepsilon_o = 1$. Dentro tenemos

$$\gamma^2 = n_1^2 k_o^2 - k^2$$

mientras que fuera debemos requerir que el campo decaiga exponencialmente, o equivalentemente $\beta^2 = k^2 - n_o^2 k_o^2 < 0$. Por lo tanto debemos resolver

$$\begin{array}{ll} \left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\Psi = 0 & \text{dentro} \\ \left(\nabla_t^2 - \beta^2\right)\Psi = 0 & \text{fuera} \end{array}$$

Emparejando las condiciones límite obtenemos la relación para γ y β. Por ejemplo, si asumimos $\partial_\phi = 0$, tenemos

$$\Psi = \left[\begin{array}{ll} J_o(\gamma\rho) & \rho \leq a \\ AK_o(\beta\rho) & \rho > a \end{array} \right.$$

Para el modo TE, podemos resolver para los campos y finalmente forzar las condiciones dialectricas en la interfase (a) continuidad del potencial, (b) continuidad de los campos tangenciales. Con estas dos condiciones podemos encontrar la solución que estamos buscando $k(\omega$.

Problema: Tomemos una guía de onda formada por dos placas infinitas que hacen un ángulo β en $x = y = 0$. Hay un material dieléctrico para $\rho \leq a$. Encuentre los modos TM.

Tenemos que resolver la ecuación de Helmholtz para las regiones

$$\nabla_\perp^2 E_z + \gamma_\epsilon^2 E_z = 0 \qquad \gamma_\epsilon^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} - k^2$$

lo que tiene solución para $\rho < a$

$$E_{z,1}(r,\theta) = A_1 J_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_1 \rho) \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right)$$

con

$$k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi\theta}{a\beta}\right)^2 - (\gamma_1)^2$$

mientras la solución para $\rho > a$

$$E_{z,2}(r,\theta) = A_2 K_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_2 \rho) \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right)$$

con

$$k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi\theta}{a\beta}\right)^2 + (\gamma_2)^2$$

Las condiciones de borde son

$$E_{z,z}(\rho \to a) = E_{z,2}(\rho \to a)$$

o

$$A_1 J_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_1 a) = A_2 K_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_2 a)$$

mientras que para

$$\epsilon E_{\rho,1}(\rho \to a) = E_{\rho,2}(\rho \to a) \qquad\qquad E_\rho = \frac{-ik}{k^2 - \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial E_z}{\partial r}$$

tenemos

$$\frac{\epsilon}{k^2 - \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}} A_1 \gamma_1 J'_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_1 a) = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} A_2 \gamma_2 K'_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_1 a)$$

con lo cual obtenemos la función de dispersión

$$\frac{\epsilon\gamma_1}{\gamma_2} \frac{J_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_1 a)}{J_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_1 a)} = \frac{k^2 - \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{K'_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_2 a)}{K_{\left(\frac{m\pi}{\beta}\right)}(\gamma_2 a)}$$

3. Cavidades resonantes

Una cavidad resonante es una guía de onda con extremos, un ejemplo es lo que tienes en un microondas. El problema de cavidad resonante puede ser resuelto con exactitud de la misma manera excepto que la variación en z debe ser una superposición de

$$A \sin kz + B \cos kz$$

con $k = p\pi/L$. Para los modos TM requerimos que E_t desaparezca en el límite $z = 0$, L. Por lo tanto

$$E_z(x, y, z) = E_z(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} E_t &= \frac{p\pi}{L\gamma^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \nabla_t E_z \\ H_t &= \frac{i\varepsilon\omega}{c\gamma^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \hat{z} \times \nabla_t E_z \end{aligned}$$

la situación equivalente para modos TE es

$$H_z(x, y, z) = H_z(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} E_t &= \frac{p\pi}{L\gamma^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \nabla_t H_z \\ E_t &= -\frac{i\mu\omega}{c\gamma^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \hat{z} \times \nabla_t H_z \end{aligned}$$

En ambos casos, podemos tener

$$\gamma^2 = n^2 k_o^2 - \left(\frac{\pi p}{L}\right)$$

Como γ sólo contiene informaci"on geométrica, las ondas que están paradas pueden resonar a

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{n^2}\left(\gamma^2 + \left(\frac{\pi p}{L}\right)^2\right)$$

y los modos resonantes están controlados por p y los valores de γ se obtienen por el problema de los valores propios en la dirección perpendicular.

En la tierra hay una cavidad natural entre el suelo y la ionosfera. Esta cavidad la cual puede ser excitada por descargas de relámpago, y pueden ser observadas en el régimen de las frecuencias Hz. Estas son llamadas resonancias de Schumann.

4. Atenuación de la energía debido a conductores imperfectos

Dentro de un conductor tenemos

$$
\begin{aligned}
n \times (E - E_c) &= 0 \\
n \times (H - H_c) &= 0 \\
n \cdot (B - B_c) &= 0
\end{aligned}
$$

ya que la ley de Ohm $J = \sigma E$ no permite una corriente superficial. Notemos que no estamos usando la condición de superficie de la densidad de carga superficial. Debemos tener para campos harmónicos dentro del conductor con normal R

$$
\begin{aligned}
E_c &= \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times H_c \simeq -\frac{c}{4\pi\rho} \hat{r} \times \frac{\partial H_c}{\partial r} \\
H_c &= -i \frac{c}{\mu_c \omega} \nabla \times E_c \simeq i \frac{c}{\mu_c \omega} \hat{r} \times \frac{\partial E_c}{\partial r}
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\frac{4\pi\sigma}{c} >> \frac{\epsilon\omega}{c}
$$

y así no consideramos la variación temporal del campo eléctrico en la ecuación de Ampere. En estas relaciones no hemos considerado variaciones en otras direcciones, por lo tanto los campos son paralelos a la superficie. La solución es

$$
\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{2}{\mu_c \omega \sigma}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} H_c &= H_{\parallel} e^{-r/\delta} e^{ir/\delta} \\ E_c &= \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{8\pi\sigma}} (1 - i)(\hat{r} \times H_{\parallel}) e^{-r/\delta} e^{ir/\delta} \end{aligned}
$$

Justo fuera del conductor, tenemos

$$
\begin{aligned}
E = E_{\parallel} &\simeq \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{8\pi\sigma}} (1 - i)(\hat{r} \times H_{\parallel}) \\
H &= H_{\parallel}
\end{aligned}
$$

Para el modo TM, la energía disipada en el conductor por unidad de longitud es

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dz} &= -\frac{1}{\Delta z} \frac{1}{2} Re \int_{dentro} J \cdot E^* \, d^3x \\
&= \frac{\sigma}{2} \int_0^{\infty} e^{-2r/\delta} \, dr \oint_C E_{\parallel}^2 \, dl \\
&= -\left(\frac{\sigma}{4\pi\delta} \right) \oint_S \left| E_{\parallel} \right|^2 \, dl \\
&= -\left(\frac{c^2}{32\pi\sigma\delta} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^2 \left(\frac{c}{\mu\omega_\lambda} \right)^2 \oint_S \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|^2 \, dl
\end{aligned}
$$

con la integral a lo largo del límite de la área representativa. El parámetro de la atenuación puede ser definido como

$$P(z) = P_o e^{-2\beta(\omega)z} \quad \rightarrow \quad \beta(\omega) = -\frac{1}{2P}\frac{dP}{dz}$$

El flujo de energía total a lo largo de la guía es

$$\begin{aligned} P &= \int_A S \cdot \hat{z}\, da \\ &= \left(\frac{c}{4\pi}\right)\frac{1}{2}\int_A (E \times H^*) \cdot \hat{z}\, da \\ &= \left(\frac{c}{4\pi}\right)\frac{1}{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2 \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2}\,\varepsilon \int_A |E_z|^2\ da \end{aligned}$$

con este resultado β puede ser escrito. La energía por unidad de longitud es

$$\frac{U}{L_z} = \int_A \left(\varepsilon|E|^2 + \mu|H|^2\right)\ da = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2 \varepsilon \int_A |E_z|^2\ da$$

lo cual define la velocidad del grupo (de la misma forma que antes) para dar como resultado

$$\frac{P}{U} = v_g = \frac{c}{n}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}$$

5. Propagación en conductores

Supongamos que tenemos un alambre cilíndrico de radio a y conductividad σ. Las ecuaciones de Maxwell nos da

$$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot \epsilon E) = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Por ahora asumiremos que tenemos

$$\frac{4\pi\sigma}{c} >> \frac{\omega}{c}$$

para tener soluciones no propagantes. Para tener soluciones propagantes, tenemos que relajar esta ultima restricción. Notemos que en la red eléctrica en ciudades en general tenemos $\omega \sim 60$ Hz, por lo tanto la restricción se satisface plenamente. Por lo tanto tenemos la ecuación de difusión

$$\nabla^2 E + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

para el caso de una corriente harmónica,

$$J = J_z(r)e^{-i\omega t}\hat{z}$$

tenemos que resolver

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial J_z}{\partial\rho}\right)+\tau^2 J_z=0$$

donde $\tau^2 = i/\delta^2$ con

$$\delta=\frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$$

la solución es entonces

$$J_z(\rho)=C_1 J_o(\tau\rho)+C_2 N_o(\tau\rho)$$

Notemos que $N_o(\tau\rho)$ es singular en el origen. Por lo tanto

$$J_z(\rho)=C_1 J_o\left(\sqrt{i}\frac{\rho}{\delta}\right)$$

El coeficiente C_1 se puede evaluar en termino de la corriente en la superficie

$$J_z(\rho)=J_s\frac{J_o\left(\sqrt{i}\frac{\rho}{\delta}\right)}{J_o\left(\sqrt{i}\frac{a}{\delta}\right)}$$

Notemos que mientras aumentamos la conductividad la corriente se va haciendo mas y mas superficial. Podemos definir la impedancia $Z = R - i\omega L$ por unidad de largo a través de la diferencia de potencial medida en la superficie del alambre

$$\frac{Z}{L}=\frac{V}{IL}=\frac{E_z(r=a)L}{IL}=\frac{J_z(\rho=a)}{\sigma I}$$

La corriente total es

$$I=\int_0^a J_o\left(\sqrt{i}\frac{\rho}{\delta}\right)2\pi r dr$$

la cual se muestra en la Fig. 2b. Para frecuencias pequeñas tenemos

$$Z(\omega\to 0)=R_{Dc}=\frac{1}{\pi a^2\sigma}$$

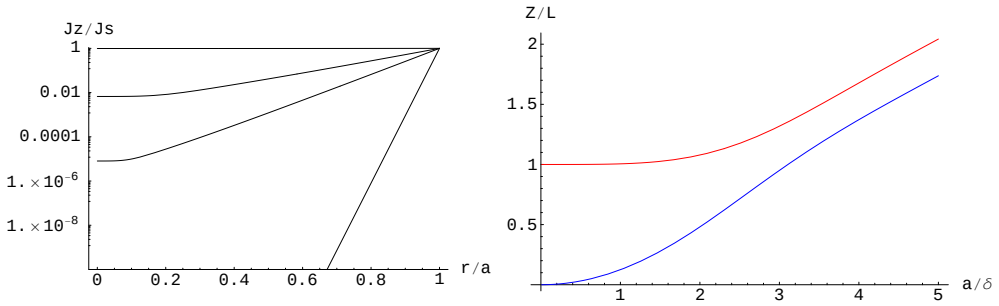

Figura 2: (a) Corriente para diferentes conductividades $\delta/a = 1, 0{,}1, 0{,}05, 0{,}01$. (b)Impedancia como función de δ/a para la parte real (roja) e imaginaria (azul).