GUIA 5

1. Un cambio de normas equivalentes transforma funciones de Lipschitz en funciones de Lipschitz (la constante de Lipschitz puede cambiar)

2. La composición de dos funciones de Lipschitz es una función de Lipschitz.

3. Mostrar que
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := x^2$$
es localmente una función de Lipschitz, sin ser (globalmente) una función de Lipschitz.

4. La función
$$F : (-1,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := |x|^{1/3}$$
es una función continua, pero no es una función de Lipschitz en $x_0 = 0$.

5. Buscar los puntos $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ donde no se puede aplicar el Teorema de Cauchy - Lischitz para el sistema de ecuaciones diferenciales
$$x_1' = x_2^2 + t^{1/3},$$
$$x_2' = x_1^{1/3}.$$

6. Buscar los puntos $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ donde no se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Lipschitz para la ecuación diferencial
$$x' = t^{1/3} + x^{1/3}.$$

7. Calcular la tercera función de la sucesión de aproximaciones sucesivas para el problema de Cauchy
$$x_1 = -x_2, \quad x_1(0) = 1,$$
$$x_2' = x_1^2, \quad x_2(0) = 2.$$

8. Calcular todas las funciones φ_k de la sucesión de aproximaciones sucesivas para el problema de Cauchy en $D = \mathbb{R}^2$
$$x' = x, \quad x(0) = 1.$$
Verificar que la sucesión converge a la solución, uniformemente en $[-T, T]$, para cada $T > 0$.

9. Sea $u : (0, \infty) \to R_+$ una función derivable tal que

$$u'(t) \leq u(t), \quad \forall\, t > 0.$$

Mostrar que

$$u(t) \leq u(1)e^{t-1}, \quad \forall\, t \geq 1.$$

10. Mostrar que el problema de Cauchy

$$x' = x^{2/3},$$
$$x(0) = 0,$$

tiene dos soluciones.

11. Calcular la segunda función de la sucesión de las aproximaciones sucesivas por los siguientes problemas de Cauchy:

a) $x' = t + e^x, \; x(1) = 1;$

b) $\begin{cases} x' = \frac{t}{y}, & x(0) = 1 \\ y' = -\frac{t}{x}, & y(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = -y^2, & x(0) = 3 \\ y' = xy, & y(0) = 2 \end{cases}$