Universidad de Chile
Facultad de Ciencias

Guía 1 Matemáticas II. Semestre Primavera 2011

1. Calcule los siguientes límites (si existen):

   a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

   b) $\lim_{x\to 4} (3x^{\frac{3}{2}}+20\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$

   c) $\lim_{x\to -4} ((x+1)^6)^{\frac{1}{3}}$

   d) $\lim_{t\to -4} \sqrt{\dfrac{t+8}{25-t^2}}$

   e) $\lim_{t\to 3} \dfrac{t^2-9}{t-3}$

   f) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

   g) $\lim_{x\to \pi/4} (\tan(x)-\operatorname{sen}(2x))$

   h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\tan(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

   i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$

   j) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

   k) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+8}$

   l) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$

   m) $\lim_{n\to 2} \dfrac{3x+5}{5x-3}$

   n) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$

   ñ) $\lim_{x\to \pi/4} \tan(x)$

   o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

   p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\tan(x)}$

   q) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)}{x}$ con $\alpha\in R$ fijo

   r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x+\alpha)-\tan(\alpha)}{x}$ con $\alpha\in R$ fijo

   s) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$

   t) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

   u) $\lim_{x\to 2} x^3+4x^2-5$

   v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4+3x^3+2x}{x^2+5}$

   w) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(2x)}{x}$

   x) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x-|x|}$

   y) $\lim_{x\to 3} f(x)$ donde $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{2} & \text{si } x\le 3\\ \frac{12-2x}{3} & \text{si } x>3\end{cases}$

2. Use propiedades de los límites laterales, para determinar los límites (si existen):

   a) $\lim_{x\to 0^+} (3-\sqrt{x})$

   b) $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{x-5}{2|x-5|}$

   c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-5}{2|x-5|}$

   d) $\lim_{t\to (-4)^-} \dfrac{4+t}{\sqrt{(4+x)^2}}$

   e) $\lim_{t\to 3^+} \sqrt{9-t^2}$

   f) $\lim_{x\to 7^-} \dfrac{7-x}{|x-7|}$

3. Calcule los siguientes límites, si existen.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-17}{x^3-2x+27}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x}{x^3-5}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-5x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x^2-x}{x^2+9}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{8-x^{\frac{1}{3}}}{2+x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

4. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

   a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - |x|$.

   d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

   f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|+3}{x} & \text{si } x < 0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x) & \text{si } x \geq \pi/4 \\ A\cos(x) - B\,\mathrm{sen}(x) & \text{si } x < \pi/4 \end{cases}$$

   ¿Cúal es el valor de A y B que hace que f sea continua ?

5. ¿Es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   continua en todo $\mathbb{R}$ para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$? Si no lo es, ¿para que valores de a es continua en $\mathbb{R}$?

6. ¿Es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 3 \\ -2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

   continua en todo $\mathbb{R}$ para cualquier valor de $a, b \in \mathbb{R}$? Si no lo es, ¿para que valores de a, b es continua en $\mathbb{R}$?

1. Resueltos

- Ejercicio $1o$ Determinar $\lim_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

  Solución

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \overset{\text{(forma indeterminada 0/0)}}{\underset{\text{(amplifico por } \sqrt{x}+2)}{=}} \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\overset{((\sqrt{x})^2 = |x|)}{\underset{\text{(pero cerca de 4 } x \text{ es positivo)}}{=}} \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(|x|-4)}$$

$$\overset{\text{(simplificando, ya que antes de tomar límite } x \neq 4)}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$$

$$= \lim_{x\to 4} (\sqrt{x}+2) \overset{\text{(propiedades básicas de límites y continuidad)}}{=} \sqrt{4}+2 = 4$$

  Rúbrica

  - **Sobresaliente**: Resuelve como en la resolución de ejemplo o equivalente, con las explicaciones.
  - **Suficiente**: Identifica la forma indeterminada, amplifica por $\sqrt{x}+2$, simplifica por $x-4$, y evalúa correctamente el límite final. Puede tener algunos errores menores u omitir algunas explicaciones.
  - **Insuficiente**: No identifica la forma indeterminada o no sabe resolverla, aunque muestre saber la regla de límite de un cociente. También en el caso en que aplica bien lo que corresponde a líites pero con errores algebraicos o aritméticos graves.
  - **Entre Insuficiente y Suficiente**: Si identifica correctamente la forma indeterminada y la amplificación respectiva, pero no sabe continuar a través de la transformación algebraica ni el cálculo de límite posterior. El optar por una u otra de las alternativas de calificación depende de la claridad y manejo de las definiciones y propiedades que realice.
  - **Mal**: Muestra no saber la definición de límite o las propiedades básicas, aún si muestra conocer algunas técnicas correctas.

- Ejercicio $2f$ Determinar $\lim_{x \to 7^-} \dfrac{7-x}{|x-7|}$

  Solución

$$\lim_{x\to 7^-} \frac{7-x}{|x-7|} \overset{(x \to 7^- \text{ implica } x<7)}{\underset{\text{(entonces antes de tomar límite } x-7<0)}{=}} \lim_{x\to 7^-} \frac{7-x}{-(x-7)} = \lim_{x\to 7^-} \frac{7-x}{7-x}$$

$$= \lim_{x\to 7^-} 1 = 1$$

  Rúbrica

- **Sobresaliente**: Resuelve como en la resolución de ejemplo o equivalente, con las explicaciones.
- **Suficiente**: Calcular el límite sin cometer errores graves y sin evidenciar desconocer definiciones ni porpiedades. Pueden faltar algunas explicaciones pero no puede obviarse el decidir el signo de $|7-x|$ a partir de que $x \to 7^-$ implica $x < 7$. Incluso es aceptable que se interprete al revés el signo de $7-x$ mientras sea el único error.
- **Insuficiente**: No lograr decidir el signo de $|7-x|$ o mostrar desconocimiento de definiciones o propiedades de límites.
- **Entre Insuficiente y Suficiente**: Lograr el límite in mostrar cómo resolvió el problema de signos valor absoluto. También puede ser si pese a tener aspectos clave del desarrollo comete errores graves algebraicos o de límites (como no saber el límite de una constante, por ejemplo) La claridad y corrección en los demás aspectos, o su falta, determina la calificación.
- **Mal**: Muestra no saber la definición de límite o las propiedades básicas, aún si muestra conocer algunas técnicas correctas.

▪ Ejercicio $3e$ Determinar $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{8-x^{\frac{1}{3}}}{2+x}$

Solución

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \frac{8-x^{\frac{1}{3}}}{2+x} \text{(se simplifica por la potencia de mayor exponente del denominador, } x\text{)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(8-x^{\frac{1}{3}}\right)/x}{(2+x)/x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8}{x} - x^{\frac{-2}{3}} \text{ (el numerador tiende a cero)}}{\frac{2}{x}+1 \text{ (el denominador tiende a 1)}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Aclaración:

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{-2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{0}\right)^2 = 0$$

Rúbrica

- **Sobresaliente**: Resuelve como en la resolución de ejemplo o equivalente, con las explicaciones.
- **Suficiente**: No muestra errores graves de límites ni algebraicos, aunque puede tener pequeños errores de distracción. Calcula el límite a través de su reducción como combinación de los límites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ (visto en clases) y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{-2}{3}} = 0$, aunque no pueda justificar con claridad el último límite

- **Insuficiente**: No logra reducir el límite a combinación de límites conocidos o sencillos, pero denota conocer la definición de límite cuando la variable tiende a $-\infty$. También en el caso en que los errores cometidos sean demasiado graves en temas de límites o de funciones o algebraicos, pese a avanzar en el desarrollo del límite.
- **Entre Insuficiente y Suficiente**: Es capaz de realizar la reducción del límite a combinación de límites conocidos o sencillos, pero siguiendo una mala estrategia (como dejar que el denominador tienda a cero) que no le lleva a completar el análisis del límite. La claridad y corrección en los demás aspectos, o su falta, determina la calificación.
- **Mal**: Muestra no saber la definición de límite o las propiedades básicas, aún si muestra conocer algunas técnicas correctas.

▪ Ejercicio 4f Estudiar continuidad de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|+3}{x} & \text{si } x < 0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

<u>Solución</u>
Sea $c \in \mathbb{R}$. Como la función está definida por dos casos, analizamos tres casos: a izquierda de 0, a derecha de 0, y en 0 (este caso adicional se debe a que en 0 la función cambia de "formato")

$c > 0$ En este caso $f(c) = c+5$ ya que ese es el formato de la función a derecha de 0. Además, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} x+5 = c+5 = f(c)$ ya que suficientemente cerca de c sólo hay valores positivos, porque $c > 0$, de modo que no importa el otro formato de f. Luego f es continua a derecha de 0.

$c < 0$ En este caso $f(c) = \frac{|c-2|+3}{c}$ ya que ese es el formato de la función a izquierda de 0, y simplificando: $f(c) = \frac{5-c}{c}$ ya que $c < 0 < 2$. Además, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{|x-2|+3}{x} = \dfrac{|c-2|+3}{c} = f(c)$ ya que suficientemente cerca de c sólo hay valores negativos, porque $c < 0$, de modo que no importa el otro formato de f. Luego f es continua a izquierda de 0.

$c = 0$ Por definición, $f(0) = 0+5 = 5$. Dado que f cambia de formato alrededor de 0, se debe analizar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ mediante límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+5 = 5$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x-2|+3}{x} \underset{(x<0<2)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{5-x}{x} = -\infty$ La última igualdad es debida a que antes de tomar límite la fracción es negativa, y como el numerador tiende a 5 y el denominador tiende a 0, el límite diverge a $-\infty$.

Como los límites laterales no coinciden en un número real, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe, por lo cual f no es continua en 0

Luego, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y es discontinua en 0.

Rúbrica

- **Sobresaliente**: Resuelve como en la resolución de ejemplo o equivalente, con las explicaciones.
- **Suficiente**: Analiza correctamente el límite en $x = 0$ por medio de límites laterales y concluye que el límite no existe y que la función no es continua en 0, y da a entender que la función es continua en los demás puntos, aunque no lo analice.
- **Insuficiente**: Demuestra no comprender que es pertinente analizar la continuidad en cero mediante límites laterales, o puede confundirse en el análisis de límites en valores distintos de cero (como aplicar en tales puntos límites laterales y asumir que el cambio de "formato" de la función ocurre en lmítes laterales de cualquier punto, no sólo en 0). Muestra desconocimiento de o incomprensión de las definiciones o propiedades involucrados en límites laterales.
- **Entre Insuficiente y Suficiente**: Analiza el límite en $x = 0$ por medio de límites laterales y concluye que el límite no existe y que la función no es continua en 0. En el proceso puede cometer errores menores que no afecten su comprensión y conocimiento de límites laterales. No muestra comprender que la pregunta requiere analizar si la función es continua en los demás puntos. La claridad y corrección en los demás aspectos, o su falta, determina la calificación.
- **Mal**: Muestra no saber la definición de límite o las propiedades básicas, aún si muestra conocer algunas técnicas correctas.