

Algunos ejercicios resueltos de Guía 1 de Parte II

Sección 5.2 del apunte

5.2.2 6 Determine un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ de grado a lo más 3 que cumple $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, $p(i-1) = 4$ y $p(2) = 1+i$. Muestre unicidad.

Respuesta Supongamos que p es un polinomio en $\mathbb{C}[x]$ que cumple lo pedido (si no existe, se deducirá de las condiciones) El polinomio p deberá cumplir que $(x-1)$ lo divida. Luego, como $gr(p) \leq 3$, existe $\{\alpha, a_0, a_1, a_2\} \subseteq \mathbb{C}$ tales que $p \equiv (x-1) \cdot (a_2x^2 + a_1x + a_0)$. Ahora, $1 = p(0) = (0-1) \cdot (a_0)$, de donde $a_0 = -1$. También $1+i = p(2) = (2-1) \cdot (4a_2 + 2a_1 - 1) = 4a_2 + 2a_1 - 1$, y por último $4 = p(i-1) = (i-1-1) \cdot ((i-1)^2a_2 + (i-1)a_1 - 1) = (i-2) \cdot (-2ia_2 + (i-1)a_1 - 1)$. Se tiene entonces un sistema de ecuaciones que tiene por solución $a_2 = \frac{7+i}{20}$ y $a_1 = \frac{3+4i}{10}$

Luego, el polinomio pedido es $\frac{(7+i)}{20}x^3 + \frac{(-1+7i)}{20}x^2 - \frac{(13+4i)}{10}x + 1$

5.2.2 20 Encuentre todas las raíces de $x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12$

Respuesta Dado que es un polinomio de grado 4, una forma simple es intentar determinar si posee raíces racionales. Como es un polinomio mónico y con coeficiente libre (o constante) -12 , entonces si tuviera raíces racionales, deben estar entre los divisores de 12: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

Fácilmente descartamos ± 1 . Veamos las demás posibilidades, utilizando división sintética y reiterando la posible raíz para determinar multiplicidades:

	1	-4	1	12	-12	
2		2	-4	-6	12	
	1	-2	-3	6		0
2		2	0	-6		
	1	0	-3		0	
2		2	4			
	1	2		1		

Como los primeros dos restos son 0 y el tercero no, entonces 2 es raíz de multiplicidad 2 del polinomio y entonces $(x-2)^2$ lo divide y el cociente es $x^2 - 3$. Como es cuadrático, encontramos fácilmente su factorización: $(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$

Entonces se tiene la factorización completa $x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12 = (x-2)^2 \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$