4.2. Guía 2. Derivadas

En esta guía asuma que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ $(\mathbf{e^x})' = \mathbf{e^x}$ y que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^+$ $(\ln(\mathbf{x}))' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$

1. Usando directamente la definición encuentre $f'(a)$ para el f y a dado.

   a) $f(x) = 3x,\ a = 2.$

   b) $f(x) = x^3,\ a = -1.$

   c) $f(x) = x^3,\ a$ arbitrario.

   d) $f(x) = 1/x,\ a = \frac{1}{2}.$

2. Demuestre, trabajando directamente con la definición, que si $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ (para $a \neq 0$). Muestre además que la tangente al gráfico de f en el punto $(a, 1/a)$ no intersecta el gráfico de f en ningún otro punto. Ilustre gráficamente.

3. Demuestre, trabajando directamente con la definición, que si $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a^3$, para $a \neq 0$. Muestre además que la tangente al gráfico de f en el punto $(a, 1/a^2)$ intersecta el gráfico de f en un punto adicional. Ilustre gráficamente.

4. Calcule las derivadas en un punto a de las siguientes funciones usando la definición. ¿ Para qué valores de a es válido su cálculo? ¿ Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$?

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ *b*) $f(x) = x^2$ *c*) $f(x) = x^3$ *d*) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

   e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ *f*) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *g*) $f(x) = x^n$ *h*) $f(x) = x^{1/n}$

5. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Encuentre su derivada $f'(x)$ para $x \neq 0$.

6. Calcular la primera y segunda derivada de cada función dada.

   a) $f(x) = 3x^{14}$

   b) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

   c) $f(x) = x\cos(x)$

   d) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^3+x}$

   e) $f(x) = sen(2x)$

   f) $f(x) = sen(x + x^2)$

   g) $f(x) = x/\cos(x)$

   h) $f(x) = \big(sen(x)\big)^2$

   i) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

   j) $f(x) = \tan(x)$

   k) $y = x\ e^{3x^2}$

   l) $g(x) = (2x-1)^2 - 6\sin(5x)$

   m) $h(x) = \left(\sqrt{x^3+5}\right)^{\frac{5}{2}}$

   n) $l(x) = 2\ln(\cos(2x))$

   ñ) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{(2x+1)}}$

   o) $s(x) = \dfrac{x^2 \cdot \ln(4x)}{e^{2x}}$

   p) $g(x) = \sin^2(2x) + \cos^2(2x)$

   q) $g(x) = \dfrac{\ln(\sin(x^2+1))}{x}$

7. $y = x\sin x$, satisface la ecuación $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$.

8. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(2, 4)$.

9. Calcular el área del triángulo formado por el eje OY, la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt{9 - x}$ en el punto de coordenadas $(5, 2)$.

10. De un ejemplo de una función uniformemente continua en $[0, 1]$ que sea diferenciable en $(0, 1)$ pero cuya derivada no sea acotada en $(0, 1)$.

11. Muestre que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$ no es diferenciable en $x = 0$.

12. Sea $g(x) := |x^3|$ para $x \in \mathbb{R}$. Encuentre $g'(x)$ y $g''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, y $g'''(x)$ para $x \neq 0$. Muestre que $g'''(0)$ no existe.

13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ Muestre que f es diferenciable en $x = 0$ y encuentre la derivada $f'(0)$.

14. Demuestre que $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$.

15. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ¿Para qué valores de n, f' es continua en 0? ¿Para qué valores de n, f es diferenciable en 0?

16. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c y que $f(c) = 0$. Muestre que $g(x) = |f(x)|$ es diferenciable en c si, y sólo si , $f'(c) = 0$.

17. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par, vale decir $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces la derivada f' es una función impar, esto es $f(-x) = -f(x)$. Pruebe además que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar, entonces g' es una función par.

18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función derivable tal que $f(tx) = tf(x)$ para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En general, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es k veces derivable y $f(tx) = t^k f(x)$ para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$, pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.