Algunos ejercicios resueltos de Guías 1 y 2 de Parte II

Sección 4 del apunte, Guía 1

4.1 ej. $4y)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

Respuesta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^3+10}\ \cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{(x^3+10)}{x^3}}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+0}} = 1\end{aligned}$$

4.1 ej. $5p)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{sen(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$

Respuesta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{1-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\big(\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\big)}{\frac{\big(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\big)}{\cos(x)}}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \big(-\cos(x)\big) = -\cos\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Sección 4 del apunte, Guía 2

4.2 ej. $6d)$ Calcular la primera y segunda derivada de cada función dada: $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^3+x}$

Respuesta

$$f'(x) = \frac{\big(\cos(x)\big)'(x^3+x) - \cos(x)(x^3+x)'}{(x^3+x)^2} = \frac{-\operatorname{sen}(x)(x^3+x) - \cos(x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$$

(como se pide segunda derivada, conviene simplificar)

$$= \frac{-\operatorname{sen}(x)}{x^3+x} - \frac{(3x^2+1)\cos(x)}{(x^3+x)^2}$$

Ahora la segunda derivada de f (la derivada de f')

$$\begin{aligned}
f''(x) = \big(f'(x)\big)' &= \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{x^3+x} - \frac{(3x^2+1)\cos(x)}{(x^3+x)^2}\right)' = -\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3+x}\right)' - \left(\frac{(3x^2+1)\cos(x)}{(x^3+x)^2}\right)' \\
&= -\left(\frac{\big(\operatorname{sen}(x)\big)'(x^3+x) - \operatorname{sen}(x)(x^3+x)'}{(x^3+x)^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\big((3x^2+1)\cos(x)\big)'(x^3+x)^2 - (3x^2+1)\cos(x)\big((x^3+x)^2\big)'}{(x^3+x)^4}\right) \\
&= -\left(\frac{\cos(x)(x^3+x) - \operatorname{sen}(x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\big((3x^2+1)'\cos(x) + (3x^2+1)\cos'(x)\big)(x^3+x)^2 - (3x^2+1)\cos(x)2(x^3+x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^4}\right) \\
&= -\left(\frac{\cos(x)(x^3+x) - \operatorname{sen}(x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\big(6x\cos(x) - (3x^2+1)\operatorname{sen}(x)\big)(x^3+x)^2 - (3x^2+1)\cos(x)2(x^3+x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^4}\right) \\
&= \frac{2(3x^2+1)^2\cos(x)}{(x^3+x)^3} + \frac{2(3x^2+1)\operatorname{sen}(x) - 6x\cos(x)}{(x^3+x)^2} - \frac{\cos(x)}{(x^3+x)}
\end{aligned}$$

4.2 ej. 9) Calcular el área del triángulo formado por el eje OY, la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt{9-x}$ en el punto de coordenadas $(5, 2)$.

Respuesta Note primero que $2 = \sqrt{9-5}$, por lo que el punto $(5, 2)$ pertenece a la curva. Ahora determinamos la derivada de la función en el punto $(5, 2)$: $\frac{dy}{dx}\big|_{x=5} = \frac{-1}{2\sqrt{9-5}} = \frac{-1}{4}$.

Por ello, las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva en $(5, 2)$ son, respectivamente,

$$y = \frac{-1}{4}(x-5)+2, \qquad y = 4(x-5)+2$$

Luego, para determinar los vértices del triángulo indicado, necesitamos el punto de intersección de ambas rectas, que obligatoriamente es el punto $(5, 2)$, que denominaremos vértice A del triángulo.

El vértice B del triángulo será la intersección de la tangente con el eje Y, es decir, $\big(0,\ \frac{13}{4}\big)$. El vértice C del triángulo será la intersección de la normal con el eje Y, es decir, $(0,\ -18)$.

Por definición y construcción, las rectas tangente y normal son perpendiculares entre sí, por lo que el triángulo es rectángulo en A. El área del triángulo será entonces la mitad del prodcuto entre $|AB|$ y $|AC|$ (las medidas de los catetos), es decir,

$$\text{área } = \frac{1}{2}\sqrt{(0-5)^2 + \left(\frac{13}{4} - 2\right)^2} \cdot \sqrt{(0-5)^2 + (-18-2)^2} = 53,13$$