Resumen y bitácora. Cálculo I (Cs. Exactas), Otoño 2011. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias

Sergio Muñoz

Contenidos propuestos

- **Lógica y conjuntos** Lenguaje matemático: objetos, propiedades, simbología básica. Conjuntos, pertenencia, subconjunto, operaciones, propiedades. Proposiciones, conectivos, variables y cuantificadores, tautologías, teoremas, nociones de sistemas axiomáticos, métodos de demostración.

- **Relaciones y funciones**: pares ordenados, producto cartesiano, relaciones entre pares de conjuntos, dominio y recorrido, nociones de función, definición de función. Propiedades y características de funciones, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, imagen y preimagen de conjuntos bajo funciones, restricción de dominio o codominio de funciones, composición e inversas. Aplicación a cardinalidad, conjuntos finitos e infinitos.

- **Sistema de los números reales como cuerpo ordenado completo** Cuerpo ordenado: propiedades, desigualdades, inecuaciones y valor absoluto. Conjuntos acotados y cotas. Supremos e ínfimos de conjuntos de números. Sistema de números reales como completación del cuerpo ordenado de los números racionales. Potencias y raíces de números. Exponencial definida mediante supremos y logaritmo como su función inversa: propiedades básicas. Aplicación a funciones reales de variable real: crecimiento y decrecimiento, operaciones entre funciones. Gráficas de funciones básicas. Paridad. Periodicidad.

- **Límite y continuidad de funciones reales de variable real** Definición de límite. Propiedades y cálculo de límites. Continuidad. Propiedades básicas de continuidad. Teoremas sobre funciones continuas sobre intervalos cerrados. Discontinuidades. Continuidad y funciones inversas.

- **Derivadas de funciones reales de variable real** Definición de derivada y de función derivable. Interpretaciones geométrica y física de la derivada. Propiedades de la derivación. Cálculo de derivadas, regla de la cadena. Derivada de inversas de funciones. Funciones determinadas implícitamente y sus derivadas. Derivadas de orden superior.

- **Primitivas e integración indefinida** Primitivas, integrales definidas como conjunto de primitivas, condiciones iniciales. Métodos de integración: sustitución directa, por partes, integrales trigonométricas, sustitución trigonométrica, fracciones parciales.

Índice

1. Lógica y conjuntos

1.1. Conjuntos

La noción de conjunto es la formalización de la idea de colección, en que lo que importa es indicar qué objetos son parte del conjunto y qué objetos no son parte del conjunto. El concepto de lista es diferente, ya que en una lista importa el orden en que se listan los objetos, e incluso es relevante cuando un mismo objeto aparece varias veces.

Un conjunto es un objeto matemático del que diremos que otros objetos matemáticos son sus elementos, o bien que pertenecen al conjunto. Un objeto matemático puede pertenecer a varios conjuntos a la vez.

Si denotamos por x a un objeto matemático y por A a un conjunto, entonces denotamos por $x \in A$ a la afirmación de que x pertenece al conjunto A o, equivalentemente, que x es un elemento del conjunto A. Para afirmar lo contrario, que x no es un elemento de A, usamos $x \notin A$.

Se utilizan llaves "{" y "}" para indicar los elementos de un conjunto, de dos formas diferentes pero válidas:

1. *Por extensión*, esto es, mostrando o indicando los elementos del conjunto: por ejemplo, $\{1, 2, 3\}$ es un conjunto cuyos elementos son el número 1, el número 2 y el número 3, y no tiene más elementos que ellos.

2. *Por comprensión*, esto es, indicando qué debe cumplir un objeto para ser elemento del conjunto: por ejemplo, $\{x \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ es un conjunto cuyos elementos son el número 1, el número 2 y el número 3, y no tiene más elementos que ellos.

En matemáticas, afirmar la igualdad de dos objetos se refiere a que son el mismo objeto. Se denota por $\alpha = \beta$ a la afirmación de que α es igual a β, y significa que α y β son dos *nombres* o *descripciones* para el mismo objeto. La afirmación de que dos objetos α y β son distintos se denota $\alpha \neq \beta$.

Es evidente entonces que para cualquier objeto matemático α se cumple $\alpha = \alpha$.

Los objetos matemáticos más simples, aparentemente, son los números (aunque hay mucho y muy complicado que decir de ellos) En ese sentido, los *nombres* de los números enteros son únicos: $1 \neq 2$, $0 \neq -5$ etcétera.

Como la noción de conjunto es más elaborada que la de número, precisamos (necesitamos) de una definición de cuándo dos conjuntos son iguales y cuándo no lo son:

Definición 1. *Dos conjuntos son iguales exactamente cuando tienen exactamente los mismos elementos.*

La definición anterior es coherente con la noción de que lo que importa en conjuntos son sus elementos y nada más.

Según la definición, los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{x \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ son iguales.

Según la definición, si A y B son conjuntos, entonces $A = B$ exactamente cuando para cada objeto posible x, ocurra simultáneamente que $x \in A$ y $x \in B$, o por el contrario, ocurra simultáneamente que $x \notin A$ y $x \notin B$.

Definición 2. *El único conjunto que carece de elementos es el conjunto vacío, que se denota* $\emptyset$.

Debido a la igualdad de conjuntos definida antes, todo conjunto que carezca de elementos debe ser igual a $\emptyset$; por ello se dice que es único.

Por el contrario, existen infinitos conjuntos diferentes que tienen, cada uno, un único elemento: $\{1\} \neq \{2\}$, etcétera.

Note que, por la definicion de $\emptyset$, todo objeto x cumple que $x \notin \emptyset$, o equivalentemente, que $x \in \emptyset$ es siempre falso.

Note que, por la igualdad de conjuntos definida, los siguientes conjuntos son iguales $\{1, 2, 3, 2, 1\}$ y $\{1, 2, 3\}$ (es el mismo conjunto escrito de dos formas distintas) es decir, es verdadero que $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$.

Note que escribir una igualdad no significa necesariamente que la igualdad es cierta: $\{1, 2, 3\} = \{1\}$ no es una igualdad cierta, ya que 2 pertenece a uno de los conjuntos pero no al otro.

No hay restricción al tipo de objeto matemático que pueda pertencecer a un conjunto: $\{1, 2, \emptyset, \{12\}\}$ es un conjunto válido cuyos elementos son: el número 1, el número 2, el conjunto $\emptyset$ y el conjunto $\{12\}$.

Aunque no se desprende de la definición, **todo conjunto A debe cumplir que** $A \neq \{A\}$.

Definición 3 (Subconjunto)**.** *Diremos que un conjunto A es subconjunto de un conjunto B cuando todo elemento de A es también elemento de B, y esa afirmación se denota $A \subseteq B$.*

Según la definición, es claro que para cualquier conjunto A se cumple $A \subseteq A$.

Usaremos $A \nsubseteq B$ para afirmar que A no es subconjunto de B. Según la definición de subconjunto, $A \nsubseteq B$ será verdadero cuando A y B sean conjuntos y al menos un elemento de A no es elemento de B.

Ejemplo 1. *Son ciertas las afirmaciones:* $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Son falsas las afirmaciones: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 3, 6\}$ *y* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

Se desprende de la definición de subconjunto que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto posible, es decir, que para todo conjunto A se cumple $\emptyset \subseteq A$. Si no fuera cierto, se tendría $\emptyset \nsubseteq A$ para algún conjunto A, y ello obliga a que exista algún elemento **perteneciente** a $\emptyset$ que no pertencezca al conjunto A, lo cual es imposible ya que no hay elementos en el conjunto vacío.

Note que para todo par de conjuntos A y B se cumple $A = B$ exactamente cuando se cumplen a la vez $A \subseteq B$ y $B \subseteq B$.

1.1.1. Operaciones entre conjuntos

Podemos combinar conjuntos mediante operaciones:

Definición 4.

1. *La unión de dos conjuntos A y B corresponde al conjunto de todos los elementos que pertenecen a alguno o a ambos conjuntos. Se anota $A \cup B$.*

2. *La intersección de dos conjuntos A y B corresponde al conjunto de todos los elementos que pertenecen a la vez a A y a B. Se anota $A \cap B$.*

3. *La diferencia de dos conjuntos A y B corresponde al conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se anota $A - B$.*

4. *Sea U un conjunto referencial (para nosotros se tratará normalmente de $\mathbb{R}$.) el cual contiene a todos los elementos de los conjuntos considerados. Si $A \subset U$, entonces el complemento de A en U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A. Se anota A^c.*

Teorema 2. *Para todos A, B y C conjuntos se cumplen:*

1. $A \cup A = A$ *y* $A \cap A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *y* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. $A \cap (A \cup B) = A$ *y* $A \cup (A \cap B) = A$
6. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ *y* $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
7. *Si U es conjunto referencial y $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, entonces $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Leyes de De Morgan)*
8. *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$*
9. *$A = B$ exactamente cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$*

Definición 5. *Para cada conjunto A definimos su* conjunto potencia *(o conjunto de partes) por:*

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Note que para todo conjunto A se cumple $\{\emptyset, A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

1.2. Lógica matemática

Definición 6. *Una proposición es una afirmación del lenguaje natural o de un lenguaje simbólico, sobre la cual podemos establecer que es verdadera o falsa.*
El ***valor de verdad*** *de una proposición es Verdadero (V) o es Falso (F), y no ambas a la vez.*

Una función proposicional es una asignación que a cada elemento de un conjunto le asigna una proposición.

Ejemplo 3. 1. *"La suma de dos numeros positivos es positiva" es una proposición, ya que puede ser verdadera o falsa (en este caso, verdadera)*

2. *"La suma de dos números negativos es positiva" es una proposición, ya que puede ser verdadera o falsa (falsa en este caso)*
3. *"La suma de dos números" no es proposición, ya que no afirma nada.*
4. *"El signo de la suma" no es proposición, ya que no afirma nada.*
5. *"Martes es el nombre de un día de la semana" es proposición, de hecho verdadera.*
6. *"x^2+4" no es proposición, no afirma nada, sino que denota una entidad numérica o algebraica, aunque según el contexto su valor de verdad puede variar al variar el valor de x.*

7. *"$x^2 + 4 = 8$" es función proposicional, y afirma una igualdad entre entidades numéricas o algebraicas.*

8. *"$x = 2$ o $x = 3$" es una función proposicional.*

1.2.1. Conectivos y tablas de verdad

Las proposiciones y las funciones proposicionales las simbolizamos con *letras proposicionales*, tales como $p, q, r, s, \ldots$.

En lo que sigue al mencionar proposiciones se asume que se refiere también a funciones proposicionales.

Algunas proposiciones son *simples* porque no se componen de otras proposiciones, y otras son *compuestas* porque se componen de otras proposiciones, combinadas mediante *conectivos lógicos*.

- Cuando una proposición afirma que dos proposiciones son verdaderas simultáneamente, se trata de una *conjunción* de proposiciones, y en lenguaje natural habitualmente corresponde a afirmar "p y q", donde p y q son las proposiciones combinadas.

  Ejemplo 4. *"$x > 3$ y $x < 5$" afirma que x es, a la vez, mayor que 3 y menor que 5.*

  La conjunción de proposiciones p y q se denota $(p \wedge q)$, donde el símbolo $\wedge$ se lee "y".

  El valor de verdad de $(p \wedge q)$ es verdadero únicamente cuando p y q son ambas verdaderas. Cuando una de ellas o ambas son falsas, la conjunción resulta falsa.

  Ejemplo 5. 1. *$(2 + 2 = 4 \wedge 5 < 3)$ es falsa, porque $5 < 3$ es falsa*

  2. *$(2^2 + 1 = 5 \wedge 3 < 6)$ es verdadera, ya que $2^2 + 1 = 5$ es verdadera y también es verdadera $3 < 6$*

- Cuando una proposición afirma que alguna de dos proposiciones es verdadera, sin excluir el caso en que puedan ser verdaderas ambas, se trata de una *disyunción* de proposiciones, y en el lenguaje natural habitualmente corresponde a afirmar "p o q", donde p y q son las proposiciones combinadas.

  Ejemplo 6. *"$x = 2$ o $x = 5$" afirma que x es 2 o que es 5*

  La disyunción de proposiciones p yq se denota $(p \vee q)$, donde el símbolo $\vee$ se lee "o".

  El valor de verdad de $(p \vee q)$ es falso únicamente cuando ambas p y q son falsas. Cuando alguna de ellas, o ambas, es verdadera, la disyunción resulta verdadera.

  Ejemplo 7. 1. *$(x^2 > 0 \vee x = 0)$ es verdadera si nos remitimos a considerar números reales, ya que cada número es cero (lo que hace verdadera a $x = 0$), o es positivo o negativo (lo que hace verdadera a $x^2 > 0$)*

  2. *$(4^2 - 3^2 = 7 \vee 3^2 + 1$ es número par$)$ es verdadera, ya que ambas proposiciones son verdaderas*

3. $(3 < 1 \vee 3 > 5)$ *es falsa ya que* $3 < 1$ *es falsa y* $3 > 5$ *es falsa*

- Cuando una proposición afirma que otra proposición es falsa, se trata de la *negación* de una proposición (más bien de su valor de verdad) y en el lenguaje natural habitualmente corresponde a afirmar "no p" o "es falso que p", donde p es la proposición considerada.

  Ejemplo 8. *"no $x = 3$" afirma que x no es 3. También se usa "$x \neq 3$" para indicar lo mismo.*

  La negación de una proposición p se denota $(\neg p)$ (en algunos textos se usa $\sim p$ o $\overline{p}$ para negación) y tal símbolo (junto con sus variantes) se lee "no".

  El valor de verdad de $\neg p$ es el contrario del valor de verdad de p, es decir, $\neg p$ es verdadera cuando p es falsa, y viceversa.

  Ejemplo 9. 1. $\neg(3^2 - 2^2 = 1)$ *es verdadera, ya que* $3^2 - 2^2 = 1$ *es falsa.*

  2. $\neg(2^2 = 2 + 2)$ *es falsa, ya que* $2^2 = 2 + 2$ *es verdadera*

- Cuando una proposición afirma que la verdad de una proposición obliga a la verdad de otra, se trata de una *proposición condicional* y en el lenguaje natural habitualmente corresponde a afirmar "p implica q" o "si p entonces q" o "q se sigue de p" o "q cuando p", donde p y q son las proposiciones combinadas.

  Ejemplo 10. *"$x^2 > 0$ cuando $x \neq 0$" afirma que $x^2 > 0$ debe ser verdad cada vez que $x \neq 0$ sea verdad*

  El condicional entre dos proposiciones p y q se denota $(p \to q)$ y el símbolo $\to$ se lee "implica" o "si... entonces...".
  El valor de verdad de $(p \to q)$ es falso únicamente cuando p es verdadero y q es falso, ya que es único caso en que se contradice que la verdad de q deba aceptarse una vez aceptada la verdad de p.

  Ejemplo 11. 1. $x^2 < 9 \to x < 2$ *es verdadera para* $x = 1$*, ya que* $1^2 < 9$ *es verdadera y* $1 < 2$ *es verdadera.*

  2. $x^2 < 9 \to x < 2$ *es verdadera para* $x = 4$*, ya que* $4^2 < 9$ *es falsa y* $4 < 2$ *es falsa también.*

  3. $x^2 < 9 \to x < 2$ *es verdadera para* $x = -5$*, ya que* $(-5)^{<}9$ *es falsa y* $(-5) < 2$ *es verdadera.*

  4. $x^2 < 9 \to x < 2$ *es falsa para* $x = 2$*, ya que* $2^2 < 9$ *es verdadera y* $2 < 2$ *es falsa*

- Cuando una proposición afirma que dos proposiciones son al mismo tiempo verdaderas o al mismo tiempo falsas, se trata de un *bicondicional* (o de una equivalencia) y en el lenguaje natural habitualmente corresponde a afirmar "p si y sólo si q", o "p equivale a q" o "p exactamente cuando q".

  Ejemplo 12. *"$4b = 0$ exactamente cuando $b = 0$" afirma que $4b = 0$ y $b = 0$ son ambas verdaderas, o ambas falsas.*

El bicondicional entre dos proposiciones p y q se denota $(p \leftrightarrow q)$ y el símbolo $\leftrightarrow$ se lee "si y sólo si".
El valor de verdad de $(p \leftrightarrow q)$ es verdadero cuando p y q tienen igual valor de verdad, y falso cuando tienen distinto valor de verdad.

Ejemplo 13. *1.* $\big((x-1)^2 = 3 \leftrightarrow x^2 - 1 = 3\big)$ *es verdadero cuando* $x = 0$*, ya que tanto* $1^2 = 3$ *como* $-1 = 3$ *son falsas*

2. $\big((x-1)^2 = 3 \leftrightarrow x^2 - 1 = 3\big)$ *es falso cuando* $x = 2$*, ya que* $1^2 = 3$ *es falsa mientras que* $2^2 - 1 = 3$ *es verdadera*

Lo anterior se puede resumir en las *Tablas de Verdad* de los conectivos, las que pueden además usarse para proposiciones compuestas, como se muestra en las dos columnas de la derecha:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$	$(q \leftrightarrow \neg p)$	$(p \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p))$
V	V	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	V

Algunas proposiciones compuestas tienen un valor de verdad que es independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen:

- *Tautologías* son proposiciones **verdaderas** para cualquier valor de verdad de las proposiciones que la componen

- *Contradicciones* son proposiciones **falsas** para cualquier valor de verdad de las proposiciones que la componen

Las proposiciones que no son Tautologías o Contradicciones son llamadas *Contingencias*.

1.2.2. Equivalencia lógica

Dos proposiciones son *lógicamente equivalentes* cuando sus valores de verdad son iguales para todo valor de verdad posible de las proposiciones que las componen. Se denota $\alpha \equiv \beta$ cuando las proposiciones α y β son lógicamente equivalentes.
Es claro que por el comportamiento del bicondicional se cumple lo siguiente:

"$\alpha \equiv \beta$ exactamente cuando $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una Tautología."

Observaciones: Note que el uso en lenguaje natural de "...exactamente cuando..." corresponde a decir "...si y sólo si..." $\dashv$

Algunas equivalencias que nos serán útiles son las siguientes, donde V denota alguna Tautología (cualquiera) y F denota alguna (cualquiera) Contradicción:

1. $\neg(\neg p) \equiv p$
2. $p \wedge F \equiv F$
3. $p \vee F \equiv p$
4. $p \wedge V \equiv p$
5. $p \vee V \equiv V$
6. $p \wedge p \equiv p$

7. $p \vee p \equiv p$
8. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
9. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
10. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
11. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
12. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
13. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
14. $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$
15. $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$
16. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
17. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
18. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
19. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
20. $(p \wedge \neg p) \equiv F$
21. $(p \vee \neg p) \equiv V$

1.2.3. Cuantificadores

Definición 7. *Sean $A \neq \emptyset$ y $p(x)$ una función proposicional (puede depender de más variables que de x) Definimos:*

1. $\forall x \in A\,\big(p(x)\big)$ *(se lee: "para todo $x \in A$ se cumple $p(x)$") como la afirmación que abrevia a la afirmación $\{x \in A \mid p(x)\} = A$*
2. $\exists x \in A\,\big(p(x)\big)$ *(se lee: "existe $x \in A$ que cumple $p(x)$") como la afirmación que abrevia a la afirmación $\{x \in A \mid p(x)\} \neq \emptyset$*

Propiedad 14. *Sean $A \neq \emptyset$ y $p(x)$ una función proposicional. Entonces se cumplen:*

1. $\neg\forall x \in A\,\big(p(x)\big) \ \equiv\ \exists x \in A\,\big(\neg p(x)\big)$
2. $\neg\exists x \in A\,\big(p(x)\big) \ \equiv\ \forall x \in A\,\big(\neg p(x)\big)$

Ejercicio: Traduzca los siguientes casos a cuantificadores con o sin negaciones, donde $A \neq \emptyset$ y $p(x)$ una función proposicional:

1. $\{x \in A \mid p(x)\} = \emptyset$
2. $\{x \in A \mid p(x)\} = \{a\}$ con $a \in A$ fijo

$\dashv$

Observaciones: Cuantificadores iterados

Note que si p es función proposicional que depende de las variables x e y (o incluso de más variables) entonces $\forall x \in A\,\big(p(x,y)\big)$ es una función proposicional que depende (en principio) de y, al igual que $\exists x \in A\,\big(p(x,y)\big)$. En ese sentido, el significado de

$$\forall y \in A\ \forall x \in A\,\big(p(x,y)\big)$$

se comprende al denotar $\forall y \in A\,\big(p(x,y)\big)$ como función proposicional $q(x)$ y entonces

$$\forall y \in A\ \forall x \in A\,\big(p(x,y)\big) \ \equiv\ \forall y \in A\,\big(q(y)\big)$$

Pero de hecho $\forall y \in A\ \forall x \in A\,\big(p(x,y)\big)$ simplemente afirma que todas las posibilidades (o combinaciones) de dos elementos de A hacen verdadera a $p(x,y)$, no habiendo mayores complicaciones, y el orden de los cuantificadores no es relevante. Incluso podemos abreviar ese tipo de afirmaciones usando $\forall x, y \in A\,\big(p(x,y)\big)$.

Del mismo modo, no hay complicaciones con $\exists y \in A\ \exists x \in A\,\big(p(x,y)\big)$, que indica que hay un par de valores que **juntos y en cierto orden** hacen verdadera a $p(x,y)$, y el orden de los cuantificadores tampoco es relevante. También se puede abreviar como $\exists x, y \in A\,\big(p(x,y)\big)$.

Distinto es el caso de las afirmaciones $\forall y \in A\ \exists x \in A\,\big(p(x,y)\big)$ y $\exists y \in A\ \forall x \in A\,\big(p(x,y)\big)$.

1. En el caso de $\forall y \in A\ \exists x \in A\ \big(p(x,y)\big)$, se afirma que a cada valor de y en A le corresponde algún valor de x en A de modo que, juntos, hacen verdadera a la afirmación $p(x,y)$, aunque no se pida que el mismo valor de x sirva para distintos valores de y.

2. En el caso de $\exists y \in A\ \forall x \in A\ \big(p(x,y)\big)$, se afirma que hay algún valor de y en A (aunque haya muchos) que junto a cualquiera de los valores de x en A hacen verdadera a la afirmación $p(x,y)$.

En muchos casos usaremos expresiones de la forma $\forall x\ \big(p(x)\big)$ y $\exists x\ \big(p(x)\big)$ ain mencionar el conjunto al cual se adscriben los valores de la variable; ello indica que se refiere a todos los objetos matemáticos posibles, a menos que estemos en un contexto en que siempre los objetos sean de un tipo definido, como al trabajar exclusivamente con números reales, por ejemplo. $\dashv$

Debe notarse que todo lo realizado con conjuntos puede reescribirse usando conectivos y cuantificadores del siguiente modo, con A y B conjuntos:

1. $A = B \ \leftrightarrow\ \forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

2. $A \subseteq B \ \leftrightarrow\ \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

3. $A = B \ \leftrightarrow\ (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

4. $A \cup B = \{x \ \mid\ x \in A \vee x \in B\}$

5. $A \cap B = \{x \ \mid\ x \in A \wedge x \in B\}$

6. $A - B = \{x \ \mid\ x \in A \wedge x \notin B\}$

1.3. Guía 1. Cálculo I Cs. Exactas

Conjuntos

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{2, 5\}$, $D = \{1, 3, 4\}$. Para cada una de las afirmaciones siguientes determine si es verdadera o falsa:

   a) $3 \in B$
   b) $A \in B$
   c) $A \subseteq B$
   d) $B \subseteq A$
   e) $A = B$
   f) $A \cap B = B$
   g) $B - A = \emptyset$
   h) $B \cap C \subseteq A$
   i) $B \cup C \subseteq A$
   j) $D - A = B \cap C$
   k) $C - D \subseteq A$
   l) $C - D \subseteq C \cup B$
   m) Si $A - B = \emptyset$ entonces $C = D$
   n) Si $A - B = \emptyset$ entonces $C \neq D$
   ñ) $A \cap B \subseteq C \cup D$

2. Determine y justifique, en cada caso, si la afirmación es verdadera o falsa, asumiendo que a, b, c y d son objetos diferentes entre sí:

   a) $\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$
   b) $\{a\} = \{a, \{a\}\}$
   c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$
   d) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$
   e) $\{\{a\}\} \subset \{a, \{a\}\}$
   f) $\{a, b\} \subset \{a, \{a, b\}\}$

3. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ conjunto referencial y sean A, B y C subconjuntos de U. Si $A \cap B = \{2\}$, $C \cap B = \{5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, determine A, B y C.

4. Justifique las siguientes afirmaciones para A, B, C y D conjuntos:

   a) $A \subseteq (A \cup B)$
   b) $B \subseteq (A \cup B)$
   c) $(A \cap B) \subseteq A$
   d) $(A \cap B) \subseteq B$
   e) $A \cup \varnothing = A$
   f) $A \cap \varnothing = \varnothing$
   g) $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ implican $A \subseteq C$
   h) $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$ cuando $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$
   i) $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$ exactamente cuando $A \subseteq B$
   j) $A \subseteq (B \cap C)$ cuando $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$
   k) $B \cup C \subseteq A$ cuando $B \subseteq A$ y $C \subseteq A$
   l) $A = A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$
   m) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   n) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

5. Justifique las siguientes afirmaciones para A y B conjuntos:

   a) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ cuando $A \subseteq B$
   b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
   c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ ¿Qué debe pasar para que se tenga la igualdad?

Lógica

1. Escriba mediante conectivos, cuantificadores y variables proposicionales las siguientes afimaciones, es decir, tradúzcalas a proposiciones lógicas:

   a) "Existe un número entero mayor que 2"

   b) "La suma de dos números naturales es mayor que cada uno de ellos"

   c) "No siempre la resta de dos números naturales es un número natural"

   d) Si todo número racional es positivo, entonces dos e impar"

   e) "Para que un triángulo sea equilátero es sufiente que todos sus ángulos sean congruentes"

   f) "Que x sea divisible por 3 es necesario para que x sea divisible por 6"

2. Sabiendo que p, q, r y s son proposiciones verdaderas, determine el valor de verdad de:

   a) $p \vee \neg q$

   b) $\neg p \vee \neg r$

   c) $s \to (p \vee \neg s)$

   d) $(s \to \neg s) \wedge s$

   e) $(p \wedge (q \vee \neg r))$

   f) $((p \wedge q) \vee \neg (p \wedge r))$

   g) $\neg p \vee (\neg p \wedge (q \vee r))$

3. Pruebe que las siguientes proposiciones no siempre son verdaderas:

   a) $\neg(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to \neg q)$

   b) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

   c) $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

4. Demuestre los siguientes teoremas de la lógica, donde $\top$ es una proposición siempre verdadera (es decir, es una Tautología) y $\perp$ es una proposición siempre falsa (es decir, una Contradicción):

   1) $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
   2) $(p \wedge \perp) \leftrightarrow \perp$
   3) $(p \vee \perp) \leftrightarrow p$
   4) $(p \wedge \top) \leftrightarrow p$
   5) $(p \vee \top) \leftrightarrow \top$
   6) $(p \wedge p) \leftrightarrow p$
   7) $(p \vee p) \leftrightarrow p$
   8) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
   9) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
   10) $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
   11) $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$
   12) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
   13) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
   14) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
   15) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ (contrapositivo de implicación)
   16) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (Ley de De Morgan)
   17) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de De Morgan)
   18) $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$
   19) $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$
   20) $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow \perp$
   21) $(p \vee \neg p) \leftrightarrow \top$
   22) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$
   23) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
   24) $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
   25) $(\neg p \to \perp) \to p$
   26) $p \to p$
   27) $(p \to \neg p) \leftrightarrow \neg p$
   28) $(\neg p \to p) \leftrightarrow p$
   29) $(p \to \top)$
   30) $(\top \to p) \leftrightarrow p$

31) $(\bot \to p)$
32) $(p \to \bot) \leftrightarrow \neg p$
33) $(p \wedge q) \to p$
34) $(p \wedge q) \to q$
35) [1] $p \to (p \vee q)$
36) $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$
37) $((\neg p \to \bot) \to p)$

5. Diremos que α es **equivalente** a β si $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es Tautología. Si α es una proposición lógica, diremos que β es una **subproposición** de α cuando mediante conectivos y otras proposiciones podemos construír α a partir de β. Por ejemplo, $(p \to q)$ es subproposición de $((p \vee r) \wedge (p \to q))$.

   Ahora asuma cierto el siguiente Teorema: "si α equivale a β, entonces toda proposición γ de la cual α es subproposición equivale a la proposición γ' obtenida de γ reemplazando α por β"

   Explique entonces la siguiente secuencia de equivalencias, indicando las equivalencias usadas y las respectivas Tautologías usadas del ejercicio 4:

   $((p \to \neg p) \vee (q \wedge q))$ equivale a $(\neg p \vee (q \wedge q))$ equivale a $(\neg p \vee q)$ equivale a $(p \to q)$

   Aplique ahora el mismo método para simplificar las siguientes proposiciones, si se puede (se han omitido paréntesis considerando para negaciones que $\neg \alpha \vee \beta$ deba interpretarse como $((\neg \alpha) \vee \beta)$, y análogo en otros casos):

   a) $\neg(q \vee \neg r) \vee q$
   b) $\neg p \wedge \neg(q \wedge p)$
   c) $p \wedge (q \wedge \neg p)$
   d) $\neg(\neg p \to q) \vee (p \vee q)$
   e) $\neg(\neg p \to (p \wedge \neg p))$
   f) $((p \to q) \vee (q \to p))$
   g) $\neg(\neg p \to q) \leftrightarrow (p \vee q)$
   h) $(p \vee (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow (p \vee q)$

6. Mediante deducciones realizadas usando implicaciones o equivalencias de las demostradas en ejercicio (4), realice las siguientes demostraciones de "H implica T", donde H es el conjunto de *hipótesis* o premisas, y T es la *tesis* o conclusión; la demostración puede ser directa, por contrapositivo o por contradicción:

   a) $H = \{p, (p \to q), (q \to r)\}, \quad T = r$
   b) $H = \{(p \wedge q), (q \to s), \big((p \wedge s) \to r\big)\}, \quad T = r$
   c) $H = \{(p \to q), (r \to \neg q)\}, \quad T = (p \to \neg r)$

7. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determine el valor de verdad de:

   a) $\exists\, x \in A \ (x \neq 0)$
   b) $\forall\, x \in A \ (x > 1 \to x = 2)$
   c) $\exists\, x \in A \ (x > 2 \wedge x^2 \neq 3)$
   d) $\forall\, x \in A \ \exists\, y \in A \ (y > x)$
   e) $\exists\, x \in A \ \forall\, y \in A \ (y > x)$
   f) $\forall\, x \in A \ \forall\, y \in A \ (x + y \in A)$

[1] Corregido

8. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

   a) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq x)$
   b) $\forall x \in \mathbb{R}\ (5x > 4x)$
   c) [2] $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 2x)$
   d) $\exists x \in \mathbb{R}\ (2x = x)$
   e) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0 \Rightarrow x > 0)$
   f) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \Rightarrow x \geq 0)$
   g) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0 \wedge x \leq 0)$
   h) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x \geq 1 \wedge x \leq 1)$

9. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

   a) $\exists x \in A\ x \neq 0$
   b) $\forall x \in A\ (x > 1 \ \Rightarrow\ x = 2)$
   c) $\exists x \in A\ (x > 2 \wedge x^2 \neq 4)$
   d) $\forall x \in A\ \exists y \in A\ (y > x)$
   e) $\exists x \in A\ \exists y \in A\ (x + y = 3)$
   f) $\forall x \in A\ \exists y \in A\ (x + y \in A)$
   g) $\exists x \in A\ (x + 1 \notin A)$

10. Use contraejemplos para demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas

    a) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 5 \ \Rightarrow\ x > 6)$
    b) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 5 \wedge x < 6)$
    c) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \neq 5)$
    d) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x < y \vee x = y)$

11. Pruebe que las siguientes proposiciones no siempre son verdaderas:

    a) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
    b) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
    c) $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$
    d) $\Big(\neg \forall\, x \in A\ \ \alpha(x)\Big) \leftrightarrow \forall\, x \in A\ \ (\neg \alpha(x))$
    e) $\Big(\exists\, x \in A\ \ (\alpha(x)) \wedge \exists\, x \in A\ \ (\beta(x))\Big) \rightarrow \exists\, x \in A\ \ (\alpha(x) \wedge \beta(x))$

12. Niegue las siguientes afirmaciones, simplificando bajo equivalencia lógica:

    a) $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ (xy = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$
    b) $\forall\, x \in \mathbb{Q}\ \ \exists y \in \mathbb{Q}(xy = 1 \rightarrow x + y = 1)$
    c) $(\forall\, x \in \mathbb{Z}\ \ (x > 2)) \wedge (\exists\, x \in \mathbb{N}\ \ (x \neq 12))$
    d) $\exists\, x \in A\ \ \forall\, y \in A\ \ (p(x, y) \leftrightarrow \neg q(x))$
    e) $\exists x \in \mathbb{R}\ x \neq 0$
    f) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 1 \ \Rightarrow\ x = 2)$
    g) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 2 \ \Rightarrow\ x = 2)$
    h) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 2 \wedge\ x^2 \neq 3)$
    i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in A\ (y > x)$
    j) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in A\ (x + y = 3)$
    k) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in A\ (x + y \in A)$
    l) $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
    m) $\exists! x \in \mathbb{R}\ x \geq -2$

[2] Corregido

2. Funciones y conjuntos.

2.1. Pares ordenados y producto cartesiano.

Definición 8 (Par ordenado)**.** *Un par ordenado de dos objetos x e y es un objeto matemático que menciona a x e y en ese orden. Se denota por (x, y) a tal par ordenado.*

La propiedad fundamental de pares ordenados es: $\forall a, b, c, d \left((a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)\right)$.

Use la propiedad fundamental de pares ordenados para probar que una representación de (a, b) es $\{a, \{a, b\}\}$

Definición 9 (Producto Cartesiano)**.** *El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto $\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$*

En general el producto cartesiano de conjuntos no es conmutativo.

Como operación entre conjuntos, pueden explorarse las propiedades que cumple el producto cartesiano respecto de la unión, intersección, resta y complemento de conjuntos, a la vez que con subconjunto. Ello se tratará en la segunda guía de ejercicios.

Se acostumbra a abreviar $A \times A$ escribiendo A^2, y $A \times (A \times A)$ se abrevia A^3, pero debe tenerse cuidado de no extrapolar toda operatoria de potencias a estos casos.

2.2. Relaciones

Una relación binaria entre elementos de un conjunto no vacío A es un subconjunto de $A \times A$. Los pares ordenados que pertenecen a la relación indican cuales pares de elementos se relacionan.

Diremos que una relación R es "en A" cuando $R \subseteq A \times A$.

Para cada conjunto no vacío A siempre hay tres relaciones binarias triviales:

1. $\emptyset$, donde no hay elementos relacionados,
2. $A \times A$, donde cada elemento se relaciona con cada uno de los demás elementos de A, y
3. $id_A := \{(x, x) \in A \times A \mid x \in A\}$ llamada *diagonal* de A o *identidad* en A, en que cada elemento se relaciona sólo consigo mismo.

Definición 10 (Dominio y Recorrido)**.** *Sean A y B conjuntos no vacíos y sea $R \subseteq A \times B$. Definimos:*

1. *Dominio de R, denotado* $\mathrm{Dom}(R)$, *por* $\mathrm{Dom}(R) := \{x \in A \mid \exists y \in B \left((x, y) \in R\right)\}$
2. *Recorrido de R, denotado* $\mathrm{Rec}(R)$, *por* $\mathrm{Rec}(R) := \{y \in B \mid \exists x \in A \left((x, y) \in R\right)\}$

Definición 11 (Inversa de una relación)**.** *Sean A y B conjuntos no vacíos. Dada una relación $R \subseteq A \times B$, su relación inversa, denotada R^{-1}, se define por*

$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Note que si $R \subseteq A \times B$, entonces $R^{-1} \subseteq B \times A$

Definición 12 (Composición de relaciones)**.** *Sean A, B, C y D conjuntos no vacíos. Dadas las relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq C \times D$, definimos la composición de R con S, en ese orden, denotada por $R \circ S$, por:*

$$R \circ S := \left\{(x, z) \in A \times D \mid \exists y \in B \cap C \left((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\right)\right\}$$

De la definición se desprende que $R \circ S = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Rec}(R) \cap \mathrm{Dom}(S) = \emptyset$

2.2.1. Relaciones de equivalencia y particiones.

Definición 13 (Relación de equivalencia)**.** *Sea A un conjunto no vacío. Una relación binaria R en A es una* relación de equivalencia *ssi cumple las siguientes condiciones:*

1. *(Refleja)* $\forall a \in A \big((a,a) \in R\big)$
2. *(Simétrica)* $\forall a, b \in A \big((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R\big)$
3. *(Transitiva)* $\forall a, b, c \in A \Big(\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\big) \Rightarrow (a,c) \in R\Big)$

Ejemplos de relación de equivalencia son las congruencias módulo m para cada $m \in \mathbb{Z}_0^+$, al definir para m la relación $Mod_m := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\mid\; a \equiv b\,(m)\}$. Cuando $m = 1$, se tiene $Mod_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Cuando $m = 0$, se tiene $Mod_0 = id_{\mathbb{Z}}$.

Note que una relación R en A es Refleja ssi $id_A \subseteq R$, es Simétrica ssi $R \subseteq R^{-1}$, y es Transitiva ssi $R \circ R \subseteq R$.

Definición 14. *Sea R una relación binaria en A. Definimos para cada elemento a de A su* clase de equivalencia *bajo R, denotada $[a]_R$, por:*

$$[a]_R := \{x \in A \;\mid\; (x,a) \in R\}$$

Por ejemplo, la clase de equivalencia de 0 bajo congruencia módulo 2 es el conjunto de los enteros pares.

Definición 15 (Clases de equivalencia)**.** *Sea A un conjunto no vacío. Una* partición *P de A es un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ que cumple las siguientes condiciones:*

1. $\forall x \in A \, \exists C \in P \, (x \in C)$
2. $\forall C, D \in P \, \big(C \cap D = \emptyset \Leftrightarrow C \neq D\big)$

Una partición, entonces, fragmenta al conjunto en partes disjuntas, sin perder elementos.

Teorema 15. *Sean A un conjunto no vacío, R una relación de equivalencia en A, y P una partición de A. Entonces:*

1. *El conjunto de clases de equivalencia de R determina una partición de A:*

$$par(R) := \{[x]_R \;\mid\; x \in A\}$$

2. *La partición P determina una relación de equivalencia*

$$rel(P) := \{(a,b) \in A \times A \;\mid\; \exists C \in P(\{a,b\} \subseteq C)\}$$

3. $R = rel\big(par(R)\big)$
4. $P = par\big(rel(P)\big)$

2.3. Guía 2. Cálculo I Cs. Exactas

Producto cartesiano.

1. Encuentre en cada caso, si existen, el o los valores de x en$\mathbb{R}$ que permiten la igualdad:

   a) $(x,1)=(2,1)$
   b) $(x+1,x-1)=(4,2)$
   c) $(x-3,4)=(6,x+1)$
   d) $(x^2,x)=(9,-3)$
   e) $(2x,3)=(x^2-3,x)$
   f) $\left(\dfrac{x}{x+1},-2\right)=\left(3,\dfrac{1}{x+1}\right)$

2. Sea A un conjunto tal que $A\times A$ tiene 16 elementos. Si $(3,2)$ y $(4,1)$ son dos elementos de $A\times A$, determine todos los elementos de $A\times A$.

3. Sean $A=[-1,7], B=[3,8]$ intervalos de números reales. Dibuje $A\times B$ y $B\times A$.

4. Sean $A=\{a,b\},\ B=\{2,3\},\ C=\{3,4\}$ conjuntos. Encuentre:
   $A\times(B\cup C),\ (A\times B)\cup(A\times C),\ A\times(B\cap C),\ (A\times B)\cap(A\times C)$.

5. Justifique las siguientes afirmaciones para A, B y C conjuntos:

   a) $A\times B=\emptyset \Leftrightarrow A=\emptyset$ o $B=\emptyset$
   b) $A\times B=B\times A \Leftrightarrow \big(A=B \vee A=\emptyset \vee B=\emptyset\big)$
   c) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
   d) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
   e) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
   f) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
   g) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$
   h) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C \Longleftrightarrow (A=\emptyset \vee B=\emptyset \vee C=\emptyset)$

Relaciones

1. Sea $A=\{a,b,c,d\}$. Dé un ejemplo de:

   a) Una relación en A refleja pero no transitiva.
   b) Una relación en A refleja y simétrica pero no transitiva.
   c) Una relación en A simétrica y transitiva pero no refleja.
   d) Una relación en A refleja y transitiva pero no simétrica.
   e) Una relación en A de equivalencia y muestre la partición que ella genera en A.

2. Demuestre detalladamente que la relación de congruencia módulo n, para un entero positivo n, es relación de equivalencia.

3. Determine si es de equivalencia la relación en $\mathcal{P}(A)$, para $A\neq\varnothing$, dada por A relacionado con B cuando $(A\cap B)=\varnothing$.

4. Hay tres líneas aéreas que cubren el tramo Antofagasta - Santiago ida y vuelta. Determine de cuantas formas diferentes se puede ir y volver entre Antofagasta y Santiago.

5. Describa con un dibujo las siguientes relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

   a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x > y\}$.

   b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x^2 + y^2 \leq 4 \;\wedge\; x \geq 0\}$.

   c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; -1 < x < 1 \;\wedge\; y > 1\}$.

6. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $S = \{(x, y) \in A \times A \;:\; x + y \;<\; 5\}$.

   a) Determinar todos los elementos de S.

   b) Calcule dominio y recorrido de S.

   c) Calcule S^{-1}, la relación inversa de S

7. Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;:\; \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = ky\}$, una relación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

   a) Calcule dominio y recorrido de S.

   b) Calcule S^{-1}, la relación inversa de S

8. Calcule dominio, recorrido y relación inversa de las siguientes relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; y = 2x + 3\}$

   b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; xy = -1\}$

   c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x - y < 1\}$

   d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x > 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x + y = 1\}$

9. Dadas R, S relaciones de A en B. Pruebe que

   a) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

   b) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

10. Calcule dominio, recorrido y relación inversa de las siguientes relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Grafique.

    a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; -3 < x - 2 < 3\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; -1 \leq y \leq 1\}$

    b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x = -\sqrt{9 - y}\}$

    c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x^2 + y^2 \leq 9\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; y > 0\}$

    d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x \leq 4\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; x \leq -4\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; -2 \leq y \leq 2\}$

2.4. Concepto de función.

Definición 16 (Funciones)**.** *Sean con A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B es una relación $f \subseteq A \times B$ que cumple:*

1. $\mathrm{Dom}(f) = A$

2. $\forall x, y, z \in A\ \Big(\big((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f\big) \Rightarrow y = z\Big)$

De la definición se desprende que, si f es función de A en B, entonces a cada objeto x de A le corresponde un único objeto y en B tal que $(x,y) \in f$; tal valor y es la *imagen* de x bajo f y se denota $f(x)$.

La *regla de asignación* de una función es la manera concreta en que la función asigna la imagen a cada elemento de su dominio; no siempre es expresable algebraicamente. Generalmente usaremos la expresión "$f(x)$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$" para hacer referencia a la regla de asignación de la función f.

Como una función es un tipo especial de relación, los conceptos de dominio, recorrido, inversa y composición se aplican a funciones, con algunos detalles a considerar.

Sean A y B conjuntos no vacíos y sea f una relación en $A \times B$.

1. Denotamos por $f : A \to B$ a la afirmación de que f es una función de A en B

2. En tal caso, el conjunto B es llamado *codominio* de f y denotado $\mathrm{Cod}(f)$.

3. También se cumple que $\forall x \in A\ \forall y \in B\ \Big((x,y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)\Big)$

4. Si f es función, siempre se cumple $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Cod}(f)$

5. Podemos adaptar la expresión del recorrido de una función haciendo uso del comentario 3. del siguiente modo: $\mathrm{Rec}(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A\ \big(y = f(x)\big)\}$ y siempre se tiene $\mathrm{Rec}(f) \subseteq \mathrm{Cod}(f)$.

6. La inversa de una función es la relación $f^{-1} \subseteq \mathrm{Cod}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$, pero no siempre es función.

7. La composición de funciones tiene un detalle: el orden de la composición es el contrario del orden usado al expresar la composición de relaciones: si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ entonces la composición $g \circ f$ **como funciones** corresponde a la composición $f \circ g$ **como relaciones**, como se ve al considerar que la regla de asignación acumula funciones hacia la izquierda y no hacia la derecha como se ve a continuación, en términos de funciones:

   a) $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$ y si ese conjunto es vacío, se dice que la composición no existe.

   b) $g \circ f : \mathrm{Dom}(f \circ g) \to D$ con regla de asignación $g\big(f(x)\big)$ para cada $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$

   c) El dominio de la composición *no* se obtiene, en general, de considerar sólo las restricciones inherentes a la regla de asignación.

8. Si asumimos que hay un conjunto referencial U del cual dominio y codominio son subconjuntos, entonces dadas una regla de asignación para f y un codominio fijo B, el dominio máximo posible para f es

   $$\underset{max}{\mathrm{Dom}}(f) := \{x \in U \mid f(x) \in B\}$$

   También se dice que ese es el mayor dominio para f.

Relacione lo anterior con la forma escolar (o de otras facultades) de "calcular" dominio: habitualmente se tiene $U = \mathbb{R}$ y entonces se buscan todos los reales tales que la imagen sea un número real... hablamos de lo mismo, de modo más amplio.

9. Asumiendo el conjunto referencial nuevamente, dada una regla de asignación para f y un dominio fijo A, el codominio mínimo posible para f es $\mathrm{Rec}(f)$. También se dice que es el menor codominio posible.

Dos funciones f y g son iguales cuando $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ y $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}(g)$ y $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)\ \big(f(x) = g(x)\big)$

Definición 17. *Sea f una función. Diremos que:*

1. *f es sobreyectiva ssi* $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Cod}(f)$
2. *f es inyectiva ssi* $\forall x, y \in \mathrm{Dom}(f)\ \big(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\big)$
3. *f es biyectiva ssi f es inyectiva y sobreyectiva.*

Se dice "sobre" para abreviar "sobreyectiva". También se usa "epiyectiva" en estos casos (para este curso)

Se dice "uno a uno" (1-1) para abreviar "inyectiva".

Se usa a veces "biunívoca" para indicar que una función es biyectiva (o que es una biyección)

Definición 18. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to A$, diremos que*

1. *g es* inversa por derecha *para f ssi $f \circ g = id_B$*
2. *g es* inversa por izquierda *para f ssi $g \circ f = id_A$*
3. *g es* inversa *de f ssi es inversa por izquierda y por derecha de f*

Propiedad 16. *Si $f : A \to B$, entonces:*

1. *f tiene inversa por derecha ssi f es sobreyectiva*
2. *f tiene inversa por izquierda ssi f es inyectiva*
3. *f tiene inversa ssi f es biyección.*

Definición 19. *Si $f : A \to B$ y $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, definimos:*

1. *La restricción de f a X, denotada f_X, por $f_X : X \to B$ dada por* $\forall x \in X\ \big(f_X(x) = f(x)\big)$
2. *Imagen de X por f, denotada $f[X]$, al conjunto* $f[X] := \{f(x) \in B \mid x \in X\}$
3. *Preimagen de Y por f, denotada $f^{-1}[Y]$, al conjunto* $f^{-1}[Y] := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$

Note que, como relaciones, $f_X = f \cap X \times B$.

2.5. Guía 3. Cálculo I Cs. Exactas

1. Determine cuales de la siguiente relaciones (como conjuntos de pares ordenados) son funciones, obteniendo en esos casos también sus dominios y recorridos (imagenes):

   a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 = b\}$
   b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a = b^2\}$
   c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 = 10\}$
   d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y = 8\}$
   e) $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : xy = 24\}$

2. Determine todas las funciones posibles de $A = \{1,2,3\}$ en $B = \{5,6\}$

3. En cada uno de los siguientes casos, determine el mayor conjunto A, con $A \subseteq \mathbb{Q}$, para el que f sea una función:

   a) $f : A \to \{r \in \mathbb{Q} : 3 \leq r\}$ dada por $f(x) = x + 1$
   b) $f : A \to \{r \in \mathbb{Q} : 1 \leq r \leq \frac{3}{2}\}$ dada por $f(x) = 1 - x$
   c) $f : A \to \mathbb{Q}^+$ dada por $f(x) = 3x + 5$

4. Determine el recorrido de las siguientes funciones:

   a) $f : \mathbb{Q}^- \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 12 - 3x$
   b) $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 12 - 3x$
   c) $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = \frac{2x}{3} + 8$
   d) $f : \{r \in \mathbb{Q} : \frac{3}{4} < r \leq \frac{5}{3}\} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 3 + \frac{5}{x}$

5. Clasifique las siguientes funciones en Inyectivas, Sobreyectivas y/o Biyectivas:

   a) $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 5x + 4$
   b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ dada por $f(x) = x^2 + 1$
   c) $f : \mathbb{Q}^+ \to \{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$ dada por $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$
   d) $f : \mathbb{Q}^+ \to \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 1\}$ dada por $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

6. Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x < 2 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Determine Recorrido de f, y determine si es inyectiva, si es sobreyectiva, o si es biyectiva.

7. Determine la composición $f \circ g$, en ese orden, de las siguientes funciones, indicando dominio, la regla o ecuación resultante y el recorrido, en ese orden:

   a) $g : \{1,2,3,4\} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = 2x + 1$; $f : \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq 15\} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 1 - 3x$
   b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = 2x+1$; $f : \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq 15\} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 1-3x$
   c) $g : \{a \in \mathbb{Q} : \frac{1}{2} < a \leq \frac{10}{3}\} \to \mathbb{Q}$ dada por $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$; $f : \{x \in \mathbb{Q} : 2 \leq x \leq 5\} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 1 + \frac{3}{x}$

8. Calcule $f[C]$, es decir, la imagen [3] de $C \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, si:

   a) $C = \{1, 2\}$, $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dada por $f(x) = x + 2$
   b) $C = \{x \in \mathbb{Z} : -7 \leq x < 5\}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3x - 5$
   c) $C = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \leq 56\}$, $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 5 - 3x$
   d) $C = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$, $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 3 + \frac{5}{x+1}$

9. Calcule $f^{-1}[D]$, es decir, la preimagen [4] de $D \subseteq B$, si:

   a) $D = \{2, 3, 4\}$, $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dada por $f(x) = x + 2$
   b) $D = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \leq 6\}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 5$
   c) $D = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 1 < x \leq 5\}$, $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3 - x$
   d) $D = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$, $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 3 + \frac{5}{x+1}$

10. Demuestre que si $C_1 \subseteq A$ y $C_2 \subseteq A$ y $f : A \to B$, entonces:

    a) $C_1 \subseteq C_2$ implica $f[C_1] \subseteq f[C_2]$
    b) $f[C_1 \cap C_2] \subseteq f[C_1] \cap f[C_2]$. Determine bajo qué condiciones ocurre la igualdad y demuéstrelo.
    c) $f[C_1 \cup C_2] = f[C_1] \cup f[C_2]$

11. Demuestre que si $D_1 \subseteq B$ y $D_2 \subseteq B$ y $f : A \to B$, entonces:

    a) $D_1 \subseteq D_2$ implica $f^{-1}[D_1] \subseteq f^{-1}[D_2]$
    b) $f^{-1}[D_1] \subseteq f^{-1}[D_2]$ implica $(D_1 \cap \mathrm{Rec}(f)) \subseteq (D_2 \cap \mathrm{Rec}(f))$
    c) $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$
    d) $f\Big[f^{-1}[D_1]\Big] \subseteq D_1$.
    e) $f\Big[f^{-1}[D_1]\Big] = (D_1 \cap \mathrm{Rec}(f))$

12. Demuestre:

    a) La composición de funciones inyectivas es inyectiva.
    b) Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son sobreyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ y $g \circ f$ es sobreyectiva.
    c) Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ y $g \circ f$ es biyectiva.

[3] Para $f : A \to B$ y $C \subseteq A$, se define $f[C] := \{y \in B : \exists x \in C\big(y = f(x)\big)\}$
[4] Para $f : A \to B$ y $D \subseteq B$, se define $f^{-1}[D] := \{x \in A : f(x) \in D\}$

2.6. Conjuntos finitos, infinitos y enumerables

Aunque tenemos nociones intuitivas del significado de conjuntos finito e infinito, y que esos nombres tenían relación originalmente con el hecho de si un listado de los elementos del conjunto termina (tiene fin, es finito) o no termina (no tiene fin, es infinito), ahor que sabemos más de funciones podemos dar definiciones más rigurosas, aunque no desarrollaremos por completo estas nociones aquí; en un curso superior podrán ver desarrollos más completos.

Definición 20. *Para cada número natural n definimos el* segmento inicial de $\mathbb{N}$ *de largo n (o terminado en n), y denotado I_n, por*

$$I_n := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Note que si $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$, entonces $n \leq m \Leftrightarrow I_n \subseteq I_m$.

Los segmentos iniciales dan el soporte, junto a biyecciones, para formalizar la noción de conjunto finito:

Definición 21. *Sea A un conjunto. Diremos que A es finito ssi $A = \varnothing$ o si existen $n \in \mathbb{N}$ y una biyección $f : I_n \to A$.*

Es fácil probar que si A es finito y no vacío, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}$ para el cual existe una biyección entre I_n y A.

Diremos que un B es un subconjunto propio de A si $B \subseteq A$ pero $A \neq B$. A veces se usa la notación $B \subsetneq A$.

Teorema 17. *No hay segmento inicial de los naturales que tenga biyección con un subconjunto propio de sí mismo*

Corolario 18. *No hay conjunto finito que tenga una biyección con un subconjunto propio.*

Lema 19. *Si $f : A \to B$ es inyectiva, entonces existe una biyección $g : \mathrm{Rec}(f) \to A$ tal que $g \circ f = id_A$*

Corolario 20. *Si $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces existe una función inyectiva $h : B \to A$ tal que $f \circ h = id_B$*

Corolario 21. *Si A es un conjunto finito y no vacío, y $f : A \to A$, entonces*

$$f \text{ es inyectiva ssi } f \text{ es sobreyectiva}$$

Lema 22. *Si A es un conjunto no vacío, n y m números naturales, $f : I_n \to A$ y $g : I_m \to A$ son biyecciones, entonces $n = m$*

El lema indica que para cada conjunto finito no vacío existe un único segmento inicial con el cual tiene una biyección.

Definición 22. *Definimos cardinalidad de conjuntos finitos del siguiente modo: $\#\varnothing = 0$ y si A es conjunto finito no vacío y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\#A = n$ ssi existe una biyección entre I_n y A*

Definición 23. *Un conjunto es* infinito *ssi no es finito.*

Lema 23. $\mathbb{N}$ *es infinito.*

Lema 24. $\mathbb{N}$ *tiene una biyección con un subconjunto propio.*

Propiedad 25. *Para cada conjunto infinito existe una función biyectiva de* $\mathbb{N}$ *en el conjunto.*

Teorema 26. *Cada conjunto infinito posee una biyección con un subconjunto propio.*

Hay biyecciones entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$, pero no entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$

3. Conjunto de los números reales como cuerpo ordenado y completo.

3.1. Cuerpo ordenado y completo

En esta sección formalizaremos el conjunto de los números reales, sus operaciones y las propiedades asociadas (cuerpo algebraico), el orden entre números reales, y la característica que los singulariza y los distingue del conjunto de los números racionales: Axioma del Supremo.

Definición 24. *El conjunto de los números reales se denota por* $\mathbb{R}$*, y posee dos operaciones que son funciones de* $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *en* $\mathbb{R}$ *llamadas suma (o adición) denotada* $+$ *y producto (o multiplicación) denotado* $\cdot$*, más una relación binaria no vacía denotada* $<$*, que cumplen los siguientes grupos de axiomas:*

1. *Axiomas de Cuerpo:*

   C1 Suma y producto son conmutativos: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \big(x + y = y + x \quad \wedge \quad x \cdot y = y \cdot x\big)$

   C2 Suma y producto son asociativos: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \big((x+y)+z = x+(y+z) \quad \wedge \quad (x\cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z)\big)$

   C3 $0 \in \mathbb{R}$ *y es el único neutro aditivo:* $\forall x \in \mathbb{R}\ \big(x + 0 = x\big)$

   C4 $1 \in \mathbb{R}$*,* $0 \neq 1$*, y es el único neutro multiplicativo:* $\forall x \in \mathbb{R}\big(x \cdot 1 = x\big)$

   C5 Cada número real tiene un único inverso aditivo: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! y \in \mathbb{R}\ \big(x+y = 0\big)$ *(el inverso aditivo de* x *se denota* $-x$*)*

   C6 Cada número real distinto de 0 *tiene un único inverso multiplicativo:* $\forall x \in (\mathbb{R}-\{0\})\ \exists! y \in \mathbb{R}\ \big(x \cdot y = 1\big)$ *(el inverso multiplicativo de* x *se denota* x^{-1}*)*

   C7 El producto es distributivo sobre la suma: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \big(x \cdot (y + z) = x \cdot y\ +\ x \cdot z\big)$

2. *Axiomas de orden:*

   O1 Linealidad: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \big(x \neq y \Rightarrow (x < y \vee y < x)\big)$
   También se expresa esa propiedad como tricotomía: $\forall x, y \in \mathbb{R}\big(x = y \vee x < y \vee y < x\big)$

   O2 Asimetría: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \big(x < y \Rightarrow \neg(y < x)\big)$ *(* $\neg(y < x)$ *se abrevia* $x \not< y$*)*

   O3 Transitividad: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \Big((x < y\ \wedge\ y < z) \Rightarrow x < z\Big)$

   O4 Compatibilidad con la suma: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \big(x < y \Rightarrow (x + z) < (y + z)\big)$

   O5 Compatibilidad con el producto: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \big((x < y \wedge 0 < z) \Rightarrow (x \cdot z) < (y \cdot z)\big)$

3. *Axioma del Supremo (formulación preliminar)*

   Para todo subconjunto no vacío A de los números reales para el cual exista un número real c tal que $A \subseteq\ ]-\infty, c]$ (A es acotado superiormente) existe un único número real α que cumple:

   a) $A \subseteq\ ]-\infty, \alpha]$ *(α es cota superior de A)*

   b) *Todo $x \in \mathbb{R}$ que cumpla $x < \alpha$ cumple también $A \not\subseteq\ ]-\infty, x]$ (α es la menor cota superior de A)*

Observaciones:

1. Con los axiomas *C1, C2, C3, C4, C5 y C7* se tiene un *anillo conmutativo con unidad*, como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Q}$.

2. Los axiomas *C1, C2, C3, C4, C5, C6 y C7* se tiene un *cuerpo algebraico*, como $\mathbb{Z}_p$ con p primo y como $\mathbb{Q}$ (mientras más condiciones se deben cumplir, menos objetos cumplen). $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$ con n no primo no son cuerpos, porque no poseen inversos multiplicativos para todos los elementos ditintos de cero (no cumplen *C6*).

3. Con los axiomas *C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, O1, O2, O3, O4 y O5* se tiene un *cuerpo ordenado*, como $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Z}_p$ con p primo ya no es un cuerpo, ya que se puede demostrar usando *O5* que en un cuerpo ordenado se cumple $0 < 1$ y por *O4* debe cumplirse $0 < \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ veces}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, pero en $\mathbb{Z}_p$ se cumple entonces $0 < \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ veces}} = 0$, es decir, $0 < 0$ lo que contradice *O2*.

4. Un cuerpo ordenado que cumpla el Axioma del Supremo se llama *cuerpo ordenado y completo*, y según la definición $\mathbb{R}$ cumple con ser un cuerpo ordenado y completo. Otro asunto es que lo que cotidianamente entendemos por conjunto de números reales cumple con tal definición, que no abordaremos aquí y será materia del curso de "Sistemas Numéricos" que verán más adelante en la carrera.

5. Al número α que aparece en el enunciado del Axioma del Supremos lo llamamos *el supremo de A* y lo denotamos $\sup A$ y se caracteriza como la menor cota superior de A.

6. Entonces al menos se tiene que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cuerpos ordenados, pero para mostrar que $\mathbb{Q}$ no es cuerpo ordenado completo, observe:

   Los conjunto $A_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R}^+ \ \mid\ x^2 < 2\}$ y $A_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q}^+ \ \mid\ x^2 < 2\}$ son no vacíos y son acotados superiormente (por ejemplo, por 10) y como $\mathbb{R}$ cumple el Axioma del Supremo, existe $\sup A_{\mathbb{R}}$, el cual veremos que debe ser $\sqrt{2}$. Si $\mathbb{Q}$ cumpliera el Axioma del Supremo, tendría que existir $\sup A_{\mathbb{Q}}$, el cual también tendría que ser $\sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ como habrán visto en el curso de Álgebra y Geometría I. De ese modo, $\mathbb{Q}$ no cumple el Axioma del Supremo y por tanto no es un cuerpo ordenado y completo.

7. Lo anterior no significa que nunca haya supremo de conjuntos no vacío y acotados superiormente en $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}^-$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente, y tiene a 0 por supremo. Lo que ocurre es que en $\mathbb{R}$ se garantiza que todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo, y en $\mathbb{Q}$ no se garantiza para todos esos conjuntos.

$\dashv$

Utilizaremos las siguientes abreviaturas habituales:

1. ab abrevia a $a \cdot b$
2. $a > b$ abrevia a $a < b$
3. $a \leq b$ abrevia a $(a < b \vee a = b)$
4. $a \geq b$ abrevia a $(a > b \vee a = b)$

3.2. Aplicaciones de las propiedades de los números reales

Las propiedades de cuerpo ordenado permiten justificar muchas desigualdades útiles, lo que puede ejercitar en el ejercicio 2 de la sección 3.7 de la guía 3.7.

Utilizando tales propiedades, que se cumplen para todos los valores admisibles en los dominios máximos de las funciones involucradas, se tienen también las herramientas para resolver el problema de determinar el conjunto de todos los valores que hacen verdadera una desigualdad, esto es, resolver una *inecuación*.

En general, se trata de modificar la desigualdad original de modo de establecer que la desigualdad original es equivalente a disyunciones y conjunciones de desigualdades simples, esto es, que equivalga a la pertenencia a una unión de intervalos.

Ejemplo 27. *Para resolver la inecuación $x^2 - 3x > 0$, buscamos su conjunto solución, es decir, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x > 0\}$. Para ello, consideremos las siguientes equivalencias, donde $x \in \mathbb{R}$ es genérico:*

$$x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(x-3) > 0 \underset{\text{(regla de signos)}}{\Leftrightarrow} \Big((x > 0 \wedge (x-3) > 0) \vee (x < 0 \wedge (x-3) < 0)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big((x > 0 \wedge x > 3) \vee (x < 0 \wedge x < 3)\Big)$$

(pero $(x > 0 \wedge x > 3) \Leftrightarrow x > 3$ *y* $(x < 0 \wedge x < 3) \Leftrightarrow x < 0$*)*

$$\Leftrightarrow \big(x > 3 \vee x < 0\big) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$$

Luego, el conjunto solución es $S =]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$

Lema 28. *Sea a un número real. Entonces:*

1. *Si $a > 1$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(a^n > 1\big)$*
2. *Si $0 < a < 1$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(0 < a^n < 1\big)$*

Para definir raíz cuadrada utilizamos supremo:

Definición 25. *Definimos $\sqrt{0} := 0$ y para cada $a \in \mathbb{R}^+$ definimos $\sqrt{a} := \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < a\}$*

La raíz cuadrada está bien definida para los positivos, debido a que $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < a\}$ no es vacío y es acotado superiormente, por lo que tiene supremo y además, aunque no lo demostraremos en este curso, llamando α a su supremo, se cumple $\alpha^2 = a$.

Obtenemos entonces que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \geq 0$, más aún, $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow x \geq 0$.

También obtenemos la siguiente "definición operativa" de raíz cuadrada:

Corolario 29. $\forall a, b \in \mathbb{R} \left(b = \sqrt{a} \Leftrightarrow (b \geq 0 \land a \geq 0 \land b^2 = a)\right)$

Definición 26. *Una función f es creciente (estricta) en un conjunto A ssi $A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y $\forall x, y \in A \left(x < y \to f(x) < f(y)\right)$*
Una función f es decreciente (estricta) en un conjunto A ssi $A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y $\forall x, y \in A \left(x < y \to f(x) > f(y)\right)$

Definimos la función raíz cuadrada por: $raiz : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $raiz(x) := \sqrt{x}$ (el nombre "raiz" se puede usar al mencionar la función, como en $\mathrm{Dom}(raiz)$ por ejemplo)

Lema 30. *La función raíz cuadrada es creciente en su dominio.*

Definimos la función cuadrática básica como $cuad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $cuad(x) := x^2$.

Corolario 31. $\mathrm{Rec}(raiz) = \mathbb{R}_0^+ = \mathrm{Rec}(cuad)$

Para conocer las características de la función cuadr'atica general de la forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, usamos la identidad obtenida completando cuadrados [5]

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{id-cuad}$$

Entonces para la cuadrática general se tiene:

1. Si $a > 0$ entonces $\mathrm{Rec}(f) = \left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \infty\right[$
2. Si $a < 0$ entonces $\mathrm{Rec}(f) = \left]-\infty, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right]$

3.3. Modificando gráficas conocidas: Traslaciones, reflexiones, y dilataciones.

Definición 27. *Sea $f : A \mapsto B$ función. Se definen:*

1. *Traslación horizontal de f en $h \neq 0$, como la composición de f con la función lineal $g(x) = x + h$, es decir, $f(x + h)$; será hacia la izquierda si $h > 0$ y hacia la derecha si $h < 0$.*
2. *Traslación vertical de f en $k \neq 0$, como la composición de la función lineal $g(x) = x + k$ con f, es decir, $f(x) + k$; será hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$.*

[5] Completar cuadrados se refiere a transformar un binomio de la forma $x^2 + qx$ en una resta de cuadrados de la forma $\left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4}$. Verifique la igualdad.

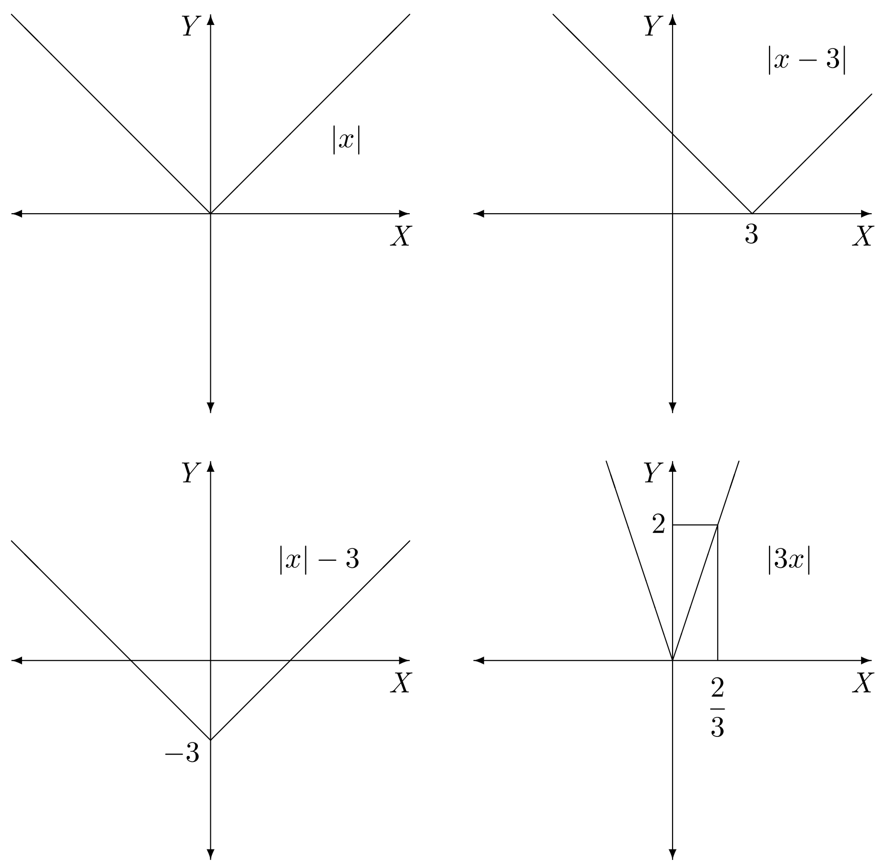
3. *Reflexión de f en el eje X, como la composición de la función $g(x) = -x$ con f, es decir, $-f(x)$.*

4. *Reflexión de f en el eje Y, como la composición de f con la función $g(x) = -x$, es decir, $f(-x)$.*

5. *Ponderación horizontal de f en $c > 0$, con $c \neq 1$, como la composición de f con la función $g(x) = c \cdot x$, es decir, $f(c \cdot x)$. Si $0 < c < 1$ se dice que es dilatación horizontal, y si $1 < c$ se dice que es contracción horizontal.*

6. *Ponderación vertical de f en $d > 0$, con $d \neq 1$, como la composición de la función $g(x) = d \cdot x$ con f, es decir, $d \cdot f(x)$. Si $0 < d < 1$ se dice que es contracción vertical, y si $1 < d$ se dice que es dilatación vertical.*

Ejemplo 32. *Consideremos los gráficos de* $|x|$, $|x-3|$, $|x|-3$, *y* $|3x|$



3.4. Función cuadrática general

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. completando cuadrados, se tiene:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4a},$$

con $\Delta = b^2 - 4ac$ el discriminante. Lo anterior significa que $ax^2 + bx + c$ es el resultado de:

1. trasladar horizontalmente x^2 en $\frac{b}{2a}$,
2. luego ponderar verticalmente por $|a|$
3. luego, si $a < 0$, se refleja en el eje X, y si $a > 0$ se mantiene igual
4. luego trasladar verticalmente en $\frac{(-\Delta)}{4a^2}$,

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Para Recorrido,
  - Si $a > 0$, entonces $\text{Rec}(f) = \left]\frac{-\Delta}{4a}, \infty\right[$
  - Si $a < 0$, entonces $\text{Rec}(f) = \left]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right[$
- Raíces:
  - si $\Delta > 0$, entonces las raíces son $\left\{-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
  - si $\Delta = 0$, la raíz es $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
  - si $\Delta < 0$, entonces no hay raíces en $\mathbb{R}$.
- Signos:
  - Si $a > 0$, entonces:
    - Si $\Delta < 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ en $\mathbb{R}$
    - Si $\Delta = 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ en $\mathbb{R} - \{-\frac{b}{2a}\}$
    - Si $\Delta > 0$, entonces $ax^2+bx+c > 0$ en $\left]-\infty, \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right[\bigcup \left]\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right), \infty\right[$
  - Si $a < 0$, entonces:
    - Si $\Delta \leq 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ en $\varnothing$
    - Si $\Delta > 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ en $\left]\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right), \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right[$
  - Crecimiento:
    - Si $a > 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right[$ y estrictamente creciente en $\left]-\frac{b}{2a}, \infty\right[$
    - Si $a < 0$, entonces f es estrictamente creciente en $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right[$ y estrictamente decreciente en $\left]-\frac{b}{2a}, \infty\right[$

3.5. Función Raíz

$f(x) = \sqrt{x}$ (es decir, aquel valor $y \geq 0$ tal que $y^2 = x$)

- $Dom(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- $Rec(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- Signos:
  f es positiva en $\mathbb{R}^+$
- Paridad:

  f no es Par ni Impar.
- Crecimiento:
  f es estrictamente creciente en todo su dominio.

3.6. Consecuencias del Axioma del Supremo

Teorema 33 (Propiedad Arquimediana)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \; \exists n \in \mathbb{N} \; \big(nx < y\big)$

Corolario 34. $\forall x \in \mathbb{R} \exists p, q \in \mathbb{Z} \; \big(p \leq x < q\big)$

Corolario 35. $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists! p \in \mathbb{Z} \; \big(p \leq x < p+1\big)$

Definición 28. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Definimos la parte entera de x como el mayor entero menor o igual a x y se denota $\lfloor x \rfloor$.*

El segundo corolario a la Propiedad Arquimediana permite obtener el siguiente resultado:

Corolario 36. *Si definimos f como la función entre reales con regla de asignación $f(x) := \lfloor x \rfloor$, entonces* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ *y* $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{Z}$

Veamos ahora las definiciones formales asociadas a supremo:

Definición 29. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y c un número real. Definimos:*

1. *c es cota superior de A ssi $A \subseteq]-\infty, c]$ ssi $\forall x \in A \; \big(x \leq c\big)$*
2. *c es cota inferior de A ssi $A \subseteq [c, \infty[$ ssi $\forall x \in A \; \big(c \leq x\big)$*
3. *A es acotado superiormente ssi existe una cota superior para A*
4. *A es acotado inferiormente ssi existe una cota inferior para A*
5. *A es acotado ssi es acotado superior e inferiormente*
6. *c es máximo de A ssi $c \in A$ y c es cota superior de A*
7. *c es mínimo de A ssi $c \in A$ y c es cota inferior de A*
8. *c es supremo de A ssi c es la menor cota superior de A*
9. *c es ínfimo de A ssi c es la mayor cota inferior de A*

En esos términos, se tiene:

> Axioma del Supremo: "Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente tiene supremo"

Corolario 37. *Todo conjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Con ello podemos también definir raíces enésimas:

Definición 30. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n > 2$*. Definimos* $\sqrt[n]{0} := 0$ *y para cada* $a \in \mathbb{R}^+$ *definimos* $\sqrt[n]{a} := \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n < a\}$.

Si $n \in \mathbb{N}$ *con* $n > 2$ *es impar, definimos para* $b \in \mathbb{R}^-$ $\sqrt[n]{b} := -\sqrt[n]{-b}$

La existencia de la raíz enésima como supremo es demostrable como en el caso de raíz cuadrada, y tampoco veremos los detalles.

Corolario 38.

1. $\forall n \in (\mathbb{N} - \{1\}) \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \left((\sqrt[n]{a})^n = a \right)$
2. $\forall n \in (\mathbb{N} - \{1\}) \forall a \in \mathbb{R}^- \left(n \text{ } impar \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \right)$

Definición 31. *Definimos la función raíz enésima,* $raiz_n$*, para* $n \in (\mathbb{N} - \{1\})$ *por:*

1. *Si* n *es par,* $raiz_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *dada por* $raiz_n(x) := \sqrt[n]{x}$
2. *Si* n *es impar,* $raiz_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $raiz_n(x) := \sqrt[n]{x}$

Corolario 39.

1. *Para cada* $n \in (\mathbb{N} - \{1\})$*, la función* $raiz_n$ *es creciente.*
2. *Si* n *es par,* $\mathrm{Rec}(raiz_n) = \mathbb{R}_0^+$
3. *Si* n *es impar,* $\mathrm{Rec}(raiz_n) = \mathbb{R}$

3.7. Guía 4. Cálculo I Cs. Exactas

Biyecciones y cardinalidad

1. Muestre que una función $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si $f(A) - f(X) = f(A - X)$ para todo $X \subset A$.

2. Demuestre que no puede existir una biyección entre un conjunto finito y un subconjunto propio de este.

3. Considere la función $f : X \to Y$. Pruebe que

   a) Si Y es finito y f inyectiva entonces X es finito.

   b) Si X es finito y f sobreyectiva entonces Y es finito.

4. Demuestre que si A y B son conjuntos finitos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

5. Pruebe que si $A \subseteq B$ y A es infinito, entonces B es infinito.

6. Sea $f : X \to Y$ una función inyectiva. Pruebe que si X es infinito entonces Y también lo es.

7. Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Pruebe que si Y es infinito entonces X también lo es.

8. Sea $f : X \to Y$ una función inyectiva. Pruebe que si Y es enumerable entonces X también lo es.

9. Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Pruebe que si X es enumerable entonces Y también lo es.

10. Dado $n \in \mathbb{N}$ pruebe que no existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.

11. Pruebe que todo conjunto finito X de números naturales posee un elemento máximo.

12. Indique un ejemplo de una sucesión decreciente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuya intersección $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ sea vacia.

13. Pruebe que si $A \subseteq B$ y B enumerable, entonces A es enumerable.

14. ¿Es enumerable el conjunto de los números primos? ¿Es infinito? Justifique su respuesta.

15. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es enumerable. ¿Son los números irracionales un conjunto enumerable? Justifique.

Números Reales

1. En un cuerpo algebraico $(A, \oplus, \otimes)$ pruebe que si *definimos* $\frac{a}{b}$ como $a \otimes (b^{-1})$ para todos a y b en A, con $b \neq 0$, entonces $\dfrac{(a \otimes d) \oplus (b \otimes c)}{b \otimes d} = \dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{c}{d}$

2. Sea $(A, \oplus, \otimes, <)$ **cuerpo ordenado** con neutro aditivo 0 y neutro multiplicativo 1. Asuma las siguientes definiciones en el cuerpo dado:

$$x - y = x \oplus (-y); \quad \tfrac{x}{y} = x \otimes y^{-1}, y \neq 0; \quad 2x = x \oplus x; \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},\ (n+1)x = nx \oplus x$$

$$\tfrac{1}{2} = (1 \oplus 1)^{-1}; \quad x^2 = x \otimes x; \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre las siguientes propiedades de cuerpo ordenado, para todos x, y, z, w en A (si se demostraron en clase, demuéstrelas en su propio estilo):

a) $x > 0 \Leftrightarrow (-x) < 0$
b) $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x \oplus y > 0$
c) $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x \otimes y > 0$
d) $(x < y \wedge z < w) \Rightarrow x \oplus z < y \oplus w$
e) $(0 < x < y \wedge 0 < z < w) \Rightarrow x \otimes z < y \otimes w$
f) $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$
g) $1 > 0$
h) $x^2 \geq 0$
i) $x > 0 \Rightarrow (x^{-1}) > 0$
j) $x > y > 0 \Rightarrow 0 < (x^{-1}) < (y^{-1})$
k) $x > 1 \Rightarrow 0 < (x^{-1}) < 1$
l) $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < (x^{-1})$
m) $x < y \Rightarrow x < \dfrac{x \oplus y}{2} < y$
n) $x - 1 < x < x \oplus 1$
ñ) $|x| \geq 0$
o) $|-x| = |x|$
p) $|x^2| = x^2$
q) $|x| \geq x$
r) $-|x| \leq x \leq |x|$
s) $|x \otimes y| = |x| \otimes |y|$
t) $y \neq 0 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
u) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
v) $y > 0 \Rightarrow (|x| = y \Leftrightarrow (x = y \vee x = (-y)))$
w) $y > 0 \Rightarrow (|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y)$
x) $y > 0 \Rightarrow (y < |x| \Leftrightarrow x < -y \vee y < x)$
y) $|x \oplus y| \leq |x| \oplus |y|$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

a) $3x - 2 > 0$
b) $\frac{x+2}{3-x} > 1$
c) $(x-2)(x+1) < (x+2)(x-1)$
d) $\frac{x-2}{x-1} < \dfrac{x+2}{x+1}$
e) $\frac{3x-2}{x^2+1} > 0$
f) $\frac{x^2+3x-1}{x^2+1} > 1$
g) $x^2 - 4 < 0$
h) $(x+2)(x - \frac{1}{3}) \leq 0$
i) $4x^2 + 3x \leq x^2 - 2x + 2$
j) $\frac{(x^2+4)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x^2+1)} < 0$
k) $\frac{x^4-5x^2-36}{x^3-x^2+x-1} < 0$
l) $\frac{x^2-6x-7}{x^2+2x+1} < 3$
m) $(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) > 0$
n) $|2x - 1| \leq 3$

ñ) $x + |x| \leq 4$

o) $|x - 4| > x - 2$

p) $|x - 7| < 5 < |5x - 25|$

q) $|x^2 - x| + x > 1$

r) $\left|\frac{x+2}{3-x}\right| < 1$

s) $|x + 2| + |x - 1| \leq 5$

t) $|x + 2| \leq 1 + |x + 3|$

4. Demuestre que si $a < b$ y $c < d$ entonces $ad + bc < ac + bd$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, tales que $a > b$. ¿Es verdadera o falsa la desigualdad $\dfrac{a^3b - ab^3}{b - a} < 0$? Justifique.

6. Sean x, y números reales positivos. Pruebe que $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x + y}{2}$.

7. Pruebe que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Pruebe que $|a - b| < \varepsilon$ implica que $|a| < |b| + \varepsilon$.

9. Demuestre que si $a < b$ en $\mathbb{R}$, entonces existe c en $\mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, y deduzca de este hecho que entre a y b existen infinitos números reales.

10. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x^2 < x$ se tiene que $0 < x < 1$.

11. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $-\dfrac{1}{2^n} < x < \dfrac{1}{2^n}$. Demuestre que $x = 0$.

12. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ está *acotada superiormente* cuando su imagen $f(X)$ es un conjunto acotado superiormente. Se escribe $sup(f) = sup\{f(x) : x \in X\}$.

    Pruebe que si f y g están acotadas superiormente ocurre lo mismo con la suma; además se tiene que $sup(f+g) \leq sup(f)+sup(g)$. Dé un ejemplo en el que $sup(f+g) < sup(f)+sup(g)$. Enuncie y pruebe un resultado análogo para infimos.

13. Dadas las funciones $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ acotadas superiormente, pruebe que el producto $f \cdot g$ es una función acotada tal que $sup(f \cdot g) \leq sup(f) \cdot sup(g)$ e $inf(f \cdot g) \geq inf(f) \cdot inf(g)$. Indique ejemplos donde se tenga la desigualdad estricta.

14. Con las hipótesis del ejercicio anterior, demuestre que $sup(f^2) = sup(f)^2$ e $inf(f^2) = inf(f)^2$.

15. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a^2 < 2 < b^2$, sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ tales que $x < 1$, $x < \dfrac{2 - a^2}{2a + 1}$ e $y < \dfrac{b^2 - 2}{2b}$. Pruebe que

    a) $(a + x)^2 < 2 < (b - y)^2$.

    b) $(b - y) > 0$.

    c) Considere el conjunto acotado $X = \{a \in \mathbb{R}^+ : a^2 < 2\}$ y concluya que el número real $c = supX$ cumple que $c^2 = 2$.

16. Pruebe que el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si $a < x < b$, $a, b \in I \Rightarrow x \in I$.

17. Determine en $\mathbb{R}$ si los siguientes conjuntos son o no acotados superior o inferiormente, y en caso de ser alguno de esos casos, o ambos, determine si existe máximo o mínimo, supremo o ínfimo:

a) $A = \{11r - 2r^2 - 12 \mid r \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{r \in \mathbb{R} \mid r^2 - 3r - 4 < 0\}$

c) $C = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R}, \quad r = z^2 - 5z + 5\}$

d) $D = \left\{r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, \quad r = \frac{1}{1+x^2}\right\}$

e) $E = \left\{r \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \quad r = \frac{1}{n}\right\}$

18. Suponga que los conjuntos de racionales A y B tienen supremo en $\mathbb{Q}$, $\sup(A)$ y $\sup(B)$ respectivamente. Demuestre que:

    a) El conjunto de cotas superiores de A tiene mínimo en $\mathbb{Q}$.

    b) Si el conjunto de cotas superiores de B intersecta a B, entonces B tiene máximo.

    c) El conjunto $\{p + q \mid p \in A,\ q \in B\}$ tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Determínelo.

    d) El conjunto $\{-r \mid r \in A\}$ tiene ínfimo en $\mathbb{Q}$. Determínelo.

    e) Hay casos en que el conjunto $\{p \cdot q \mid p \in A,\ q \in B\}$ tiene supremo en $\mathbb{Q}$ y otros en que no lo tiene. Determine las condiciones para que ello ocurra.

4. Límites de funciones reales

Se introduce la idea de límite de una función f cuando la variable *tiende* a un número c como "el valor al que se acercan las imágenes por f de los valores cercanos a c". Esa idea es demasiado informal, poco "operativa", por lo que la precisamos del siguiente modo: si $L \in \mathbb{R}$, diremos que

"L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c ssi todo intervalo abierto J que contenga a L determina un intervalo abierto I que contenga a c de modo que $f[I - \{c\}] \subseteq J$"

El motivo de quitar c del intervalo I es porque quiero el límite *hacia* c, no importando qué ocurre con la función *en* c.

Denotamos la afirmación "L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c" por $L = \lim\limits_{x \to c} f(x)$

Sin perder generalidad (S.P.G.), los intervalos J e I pueden considerarse como intervalos "simétricos" en torno a L y c respectivamente, es decir, en que el punto dado es el punto medio. No es difícil notar que para ello basta considerar que, con números reales $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, $J =]L - \epsilon,\, L + \epsilon[$ e $I =]c - \delta,\, c + \delta[$.

Por otra parte, usando valor absoluto sabemos que para $h > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ se cumple $]a - h,\, a + h[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < h\}$.

De ese modo, los conjuntos anteriores son $J = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - L| < \epsilon\}$ e $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < \delta\}$, donde el conjunto que usamos para límite es $I - \{c\}$ en vez de I; note que $I - \{c\} =]c - \delta,\, c[\cup]c,\, c + \delta[$

En vez de $f[I - \{c\}] \subseteq J$, podemos usar $\forall x \in \text{Dom}(f)\ \big(x \in (I - \{c\}) \Rightarrow f(x) \in J\big)$, pero traduciendo según el párrafo anterior.

De ese modo, la definición más precisa queda:

$$L = \lim_{x \to c} f(x) \text{ ssi } \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \text{Dom}(f)\ \big(0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\big)$$

La definición de límite se puede precisar aún más al considerar que el punto c no puede estar "alejado" del dominio de f (no importa si $c \in \text{Dom}(f)$ o no), ya que de estar alejado, carece de sentido el que intentemos determinar un valor al que se aproximan las imágenes de valores cercanos a c.

Precisando más:

Definición 32. *Sean c y A tales que $c \in \mathbb{R}$ y $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Definimos:*

1. *c es punto aislado de A ssi $\exists h > 0\ \Big(]c - h,\, c + h[\cap (A - \{c\}) = \emptyset\Big)$ (c está al menos a distancia h de cualquier punto de c, salvo tal vez el mismo c cuando $c \in A$)*

2. *c es punto de acumulación de A ssi c no es punto aislado de A ssi $\forall h > 0\ \exists y \in (A - \{c\})\ \big(y \in]c - h,\, c + h[\big)$*

3. *A' es el conjunto de puntos de acumulación de A*

Note que $([2, 5[\cup \{7\})' = [2, 5]$, ya que 7 es punto aislado del conjunto, y aunque 5 no era parte del conjunto, sí es punto de acumulación de él.

Ahora tenemos la definición completa de límite:

Definición 33. *Sean c y L números reales y f función. Si $c \in \big(\text{Dom}(f)\big)'$, entonces:*

$$L = \lim_{x \to c} f(x) \text{ ssi } \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \text{Dom}(f)\ \big(0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\big)$$

Note que, si existe, el límite es un número real.

Note que la definición de límite no indica cómo encontrar el límite ni si existe o no. Sólo indica que el número dado L (candidato a límite) es o no el límite. Necesitamos propiedades de límite que se originen en la definición para conocer límites básicos y para determinar existencia y valor de límites a partir de límites conocidos.

Propiedad 40. *Sean f y g funciones y sea $c \in \big(\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)\big)'$ Entonces:*

1. *Si existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, entonces es único (no hay dos números distintos que cumplan con ser límites de f cuando x tiende a c)*

2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$

3. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es constante (al menos no varía con x), entonces $\lim\limits_{x\to c} \alpha = \alpha$*

4. *Si existen $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, entonces:*

   a) $\lim\limits_{x\to c} f(x) + g(x) = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right) + \left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)$

   b) *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es constante (no varía con x) entonces $\lim\limits_{x\to c} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)$*

   c) $\lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)$

   d) *Si $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$*

5. *Si $c \geq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$*

4.1. Guía 5. Límite de Funciones reales de Variable real

1. Calcular los siguientes límites y usando la definición probar su resultado.

   a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x + 2$

   b) $\lim\limits_{x\to -3} 2x + 5$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + 2x - 5$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}$

   e) $\lim\limits_{x\to 3} |x - 3|$

   f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2}{x^2 + 2}$

2. Calcule los siguientes límites si es que existen, justificando todos los pasos con los teoremas apropiados. Si el límite no existe, demuéstrelo.

   a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

   b) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$

   e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 1}{|x + 1|}$

   f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2 - |x - 7| - 49}{|x - 7|}$

   g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{|x - 1| + 4} - 2}{x^2 - 1}$

3. Demuestre o encuentre contraejemplos para las siguientes proposiciones:

   a) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$ no existe.

   b) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

   c) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$

   d) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^2)$

   e) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(a-x)$

   f) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ existen, y además $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

   g) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ existen, y además $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

4. Calcular los siguientes límites.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

   e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

   f) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

   g) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

   h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

   i) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

   j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

   k) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

   l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

   m) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

   n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

   ñ) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

   o) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

   p) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

   q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

   r) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1}$

   s) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

   t) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

   u) $\displaystyle\lim_{u\to -2} \frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$

   v) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

   w) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

   x) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

   y) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

5. Considerando que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$, calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x^2)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\, sen(\dfrac{1}{x})$

e) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{sen(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(\alpha x)}{\beta x}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{sen(2x-2)}{x^3-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\tan(\pi x)}{x-2}$

j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{cotg(x)}-\dfrac{\pi}{2\,cos(x)}$

k) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{sen(2x-1)}{4x-2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2sen(x-2)}{x^2-4}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(\pi^2 x)}{x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\pi x)}{x^2}$

ñ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{sen(x-a)}{x^2-a^2}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$

p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{sen(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(a+x)+sen(a-x)-2sen(a)}{x^2}$

6. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, determine

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\right)^{x^2+2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$

i) $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+9}\right)^{x+1}$

7. Encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a_n x^n+\cdots+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_0}$, donde $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$ analizando los distintos casos de orden entre n y m.

8. Considere la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & \text{si } x<1\\ 2-x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Grafique la función f.

9. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(1/x)$ no posee límite cuando x tiende a cero.

10. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Dado cualquier $a \in \mathbb{R}$, demuestre que no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

11. Sobre el conjunto de las funciones con valores reales definidas sobre el intervalo (a, ∞) se define la siguiente relación: $f \sim g$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Muestre que esta es una relación de equivalencia.

12. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Pruebe que el conjunto de los puntos $a \in A'$ para los cuales no se tiene que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ es numerable.

13. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, con $f(X) \subseteq Y$. Si para $a \in X'$ y $b \in Y'$ se tiene $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ y además, $f(x) \neq b$ para todo $x \in X - \{a\}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$. Muestre que la condición $b \in Y'$ se deduce de tener que $f(x) \neq b$ para $x \neq a$.

14. Para todo número real definimos la función parte entera, denotada por $[x]$, que indica el mayor de los enteros menores o iguales a x. Muestre que si a y b son números positivos, entonces :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = 0.$$

Pruebe también que, en el primer caso, el límite a la izquierda es el mismo, sin embargo, en el segundo caso el límite es $+\infty$ cuando $x \to 0^-$.