4.1. Guía 1. Límite de Funciones reales de Variable real

1. Calcular los siguientes límites y usando la definición probar su resultado.

   a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x+2$

   b) $\lim\limits_{x\to -3} 2x+5$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+2x-5$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}$

   e) $\lim\limits_{x\to 3} |x-3|$

   f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2}{x^2+2}$

2. Calcule los siguientes límites si es que existen, justificando todos los pasos con los teoremas apropiados. Si el límite no existe, demuéstrelo.

   a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

   b) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

   e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{|x+1|}$

   f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-|x-7|-49}{|x-7|}$

   g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{|x-1|+4}-2}{x^2-1}$

3. Demuestre o encuentre contraejemplos para las siguientes proposiciones:

   a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$ no existe.

   b) Si $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existen, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.

   c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$

   e) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(a-x)$

   f) Si $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existen, y además $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.

   g) Si $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existen, y además $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.

4. Calcular los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

   b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$

   c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

   d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

   e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

   f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

   g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

   h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

   i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

   j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

k) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

m) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

o) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

r) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x-1}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

t) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

u) $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$

v) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

w) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

x) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

y) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

5. Considerando que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$, calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(3x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x^2)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} x\, sen(\dfrac{1}{x})$

e) $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{sen(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(\alpha x)}{\beta x}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen(2x-2)}{x^3-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\tan(\pi\, x)}{x-2}$

j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{cotg(x)} - \dfrac{\pi}{2\, cos(x)}$

k) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{sen(2x-1)}{4x-2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2sen(x-2)}{x^2-4}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(\pi^2 x)}{x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{x^2}$

ñ) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{sen(x-a)}{x^2-a^2}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$

p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{sen(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(a+x)+sen(a-x)-2sen(a)}{x^2}$

6. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, determine

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\right)^{x^2+2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\,(1+kx)^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+9}\right)^{x+1}$

7. Encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}$, donde $a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$ analizando los distintos casos de orden entre n y m.

8. Considere la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & \text{si } x<1\\ 2-x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

Encuentre $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to1}f(x)$? Grafique la función f.

9. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=sen(1/x)$ no posee límite cuando x tiende a cero.

10. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional}\\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases}$$

Dado cualquier $a\in\mathbb{R}$, demuestre que no existe $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

11. Sobre el conjunto de las funciones con valores reales definidas sobre el intervalo (a,∞) se define la siguiente relación: $f\sim g$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$. Muestre que esta es una relación de equivalencia.

12. Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monótona. Pruebe que el conjunto de los puntos $a\in A'$ para los cuales no se tiene que $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ es numerable.

13. Sean $X,Y\subseteq\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$, $g:Y\to\mathbb{R}$, con $f(X)\subseteq Y$. Si para $a\in X'$ y $b\in Y'$ se tiene $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ y $\lim\limits_{y\to b}g(y)=c$ y además, $f(x)\neq b$ para todo $x\in X-\{a\}$, entonces $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=c$. Muestre que la condición $b\in Y'$ se deduce de tener que $f(x)\neq b$ para $x\neq a$.

14. Para todo número real definimos la función parte entera, denotada por $[x]$, que indica el mayor de los enteros menores o iguales a x. Muestre que si a y b son números positivos, entonces :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}\quad\text{y}\quad\lim_{x\to0^+}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=0.$$

Pruebe también que, en el primer caso, el límite a la izquierda es el mismo, sin embargo, en el segundo caso el límite es $+\infty$ cuando $x\to0^-$.