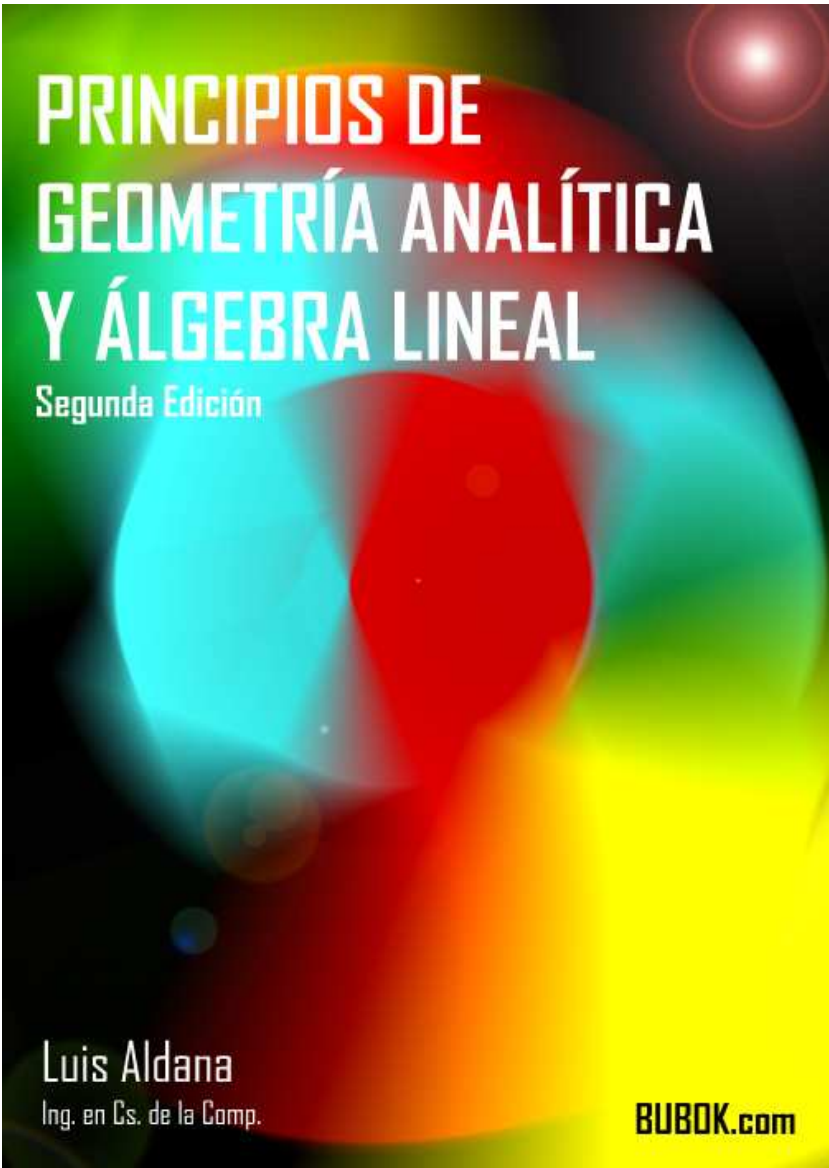




PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ÁLGEBRA LINEAL

Segunda Edición

Luis Aldana

Ing. en Cs. de la Comp.

BUBOK.com

PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ÁLGEBRA LINEAL.

Segunda Edición.

Luis Aldana.

—2008—

—3—

Ilustración de portada: Ing. Luis Aldana, 2008.

Primera edición: Diciembre 2003.

Segunda edición: Octubre 2008.

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita del autor, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidas la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Agradecimiento especial a ©www.bubok.com por la distribución de esta obra.

Esta obra ha sido patrocinada por ©www.radioenaltavoz.mx.gd

Comentarios o solicitudes en ©www.lafa.mx.gd

©2008 Todos los Derechos Reservados.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN.....	5
2. ESPACIO VECTORIAL.....	6
3. LA LÍNEA RECTA.....	9
3.1. Concepto de Línea Recta.....	9
3.2. Pendiente de una recta.....	10
3.3. Ecuación de la recta.....	10
3.4. Forma simétrica de la ecuación de la recta.....	11
3.5. Rectas y vectores.....	11
4. LA CIRCUNFERENCIA.....	13
4.1. Forma general de la ecuación de una circunferencia.....	13
4.2. Tangente a una circunferencia.....	14
5. TANGENTE A UNA CURVA.....	15
6. LA PARÁBOLA.....	16
7. LA ELIPSE.....	18
8. LA HIPÉRBOLA.....	20
9. ASÍNTOTAS.....	22
10. SUBTANGENTE Y SUBNORMAL.....	23
11. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO.....	25

12. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.....	26
12.1. Traslación de ejes de coordenadas.....	26
12.2. Rotación de ejes de coordenadas.....	26
13. COORDENADAS POLARES.....	27
14. LUGAR GEOMÉTRICO.....	28
14.1. Lugar geométrico de la recta en 3 dimensiones.....	28
14.2. Ecuaciones paramétricas.....	28
15. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.....	30
16. EL PLANO.....	31
17. LA ESFERA.....	32
17.1. Coordenadas esféricas.....	32
18. SUPERFICIES.....	33
18.1. Construcción de una superficie.....	33
19. TEMA DE APLICACIÓN.....	36
19.1. Construcción de volúmenes.....	36
20. REFERENCIAS.....	39

1. INTRODUCCIÓN.

La primera edición de este manual la realicé hace ya casi cinco años, en ese entonces me encontraba estudiando la materia Geometría Analítica y Álgebra Lineal en la Universidad. El motivo principal fue resumir y explicar lo mejor posible todos aquellos conceptos que nos resultan un dolor de cabeza a muchos estudiantes.

Me dio mucho gusto que la primera entrega tuviera bastante éxito, este trabajo ha sido leído y descargado de Internet por cientos, o tal vez hasta miles de estudiantes de secundaria, preparatoria y universidad, aunque la idea original era dirigirlo hacia universitarios.

En esta segunda edición he revisado mucho del formato y los conceptos que presenté con anterioridad debido, precisamente, a la gran cantidad de estudiantes a los que ha ayudado, ahora, es común ver a una persona que cursa la materia de Geometría Analítica y Álgebra Lineal, o alguna equivalente, auxiliarse en este trabajo.

Este manual es ideal como guía de referencia para estudiantes de secundaria, preparatoria y universitarios de las carreras de Físico-Matemáticas, Química, Ciencias de la Computación, o similares.

Aquí se explican desde conceptos sencillos tales como el de espacio vectorial, línea recta, circunferencia; y otros más avanzados como tangente a una curva, parábolas, elipses, hipérbolas, asíntotas, subtangentes y subnormales, ecuaciones generales de segundo grado, transformación de coordenadas, coordenadas polares, lugares geométricos, entre otros.

Una de las preguntas más frecuentes cuando alguien estudia estos temas es: ¿y para qué me serviría todo esto?. Hay estudiantes que se hartan de estudiar estos conceptos y no ver su utilidad real. por ello, al final de este manual, presento un capítulo dedicado a temas de aplicación donde se muestran dos ejemplos que podrían dar respuesta a la pregunta anterior.

También presento dos libros de referencia que pueden ser muy útiles para ampliar aquellos conceptos que tal vez no todos los lectores entiendan o que estén fuera del alcance de este manual.

Espero que esta guía tenga el mismo o mayor éxito que la primera y sobre todo, que ayude a la mayor cantidad de estudiantes a comprender y analizar estos y muchos otros conceptos dentro de las matemáticas y que son puntos de partida para muchas carreras universitarias relacionadas con las ciencias naturales y exactas.

El Autor.

2. ESPACIO VECTORIAL.

Es un **conjunto arbitrario diferente del vacío en el cual se han definido dos operaciones: adición y producto por un número. Un conjunto es una colección de objetos que está bien definida**, por definida, entendemos que siempre es posible saber si un elemento o no pertenece a una colección o conjunto.

Algunos ejemplos de espacios vectoriales son:

Con las operaciones usuales los siguientes conjuntos se constituyen como espacios vectoriales: Matrices de $n \times n$; $P(n)$ (polinomios), funciones continuas, $\mathbb{R}^n$ (producto cartesiano). Por ahora consideraremos el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid \dots \}$ y veremos las siguientes operaciones:

Sea un vector $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ y k un escalar —o constante—, entonces, definimos las siguientes operaciones:

- **Adición:** $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- **Producto por un escalar:** $k\vec{u} = (kx_1, ky_1)$
- **Producto de vectores:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

Y además se satisfacen los siguientes axiomas:

Sean vectores denotados como $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y a , b , c escalares, entonces:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

$$5. a(b^{\wedge}u) = (ab)^{\wedge}u = ^{\wedge}u(ab)$$

$$6. a(^{\wedge}u + ^{\wedge}v) = a^{\wedge}u + a^{\wedge}v$$

$$7. (a + b)^{\wedge}u = a^{\wedge}u + b^{\wedge}v$$

$$8. 1^{\wedge}u = ^{\wedge}u$$

$$9. ^{\wedge}u \cdot ^{\wedge}v = ^{\wedge}v \cdot ^{\wedge}u$$

$$10. ^{\wedge}u(^{\wedge}v + ^{\wedge}w) = ^{\wedge}u \cdot ^{\wedge}v + ^{\wedge}u \cdot ^{\wedge}w$$

$$11. c(^{\wedge}u^{\wedge}v) = (c^{\wedge}u)^{\wedge}v = ^{\wedge}u(c^{\wedge}v)$$

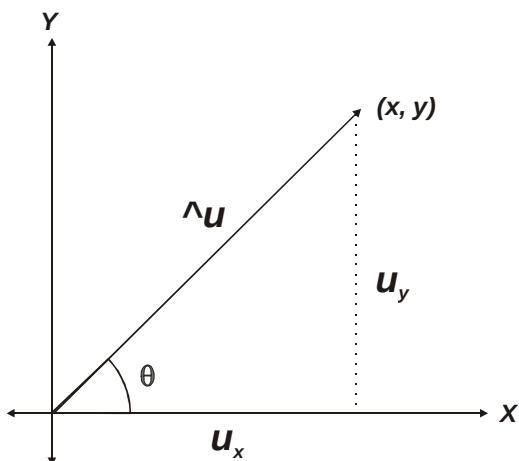
$$12. 0 \cdot ^{\wedge}u = 0$$

$$13. ^{\wedge}u \cdot ^{\wedge}u = |^{\wedge}u|^2$$

$$14. \text{Dos vectores son perpendiculares si y sólo si, } ^{\wedge}u \cdot ^{\wedge}v = 0$$

En $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ cuando consideramos un punto (x, y) cualquiera y lo representamos gráficamente en el plano cartesiano trazando una línea desde el origen, recibe el nombre de **vector de posición** o **vector anclado**. Además, si el vector $^{\wedge}u$ es elemento de $\mathbb{R}^2$, entonces $^{\wedge}u = (x, y)$.

En la figura 2.1 $^{\wedge}u$ es un vector anclado, observemos los demás elementos que componen dicha gráfica:

**Figura 2.1.**

Podemos observar que:

$$\hat{u} = u_x + u_y, \text{ donde } u_x = (x, 0) \text{ y } u_y = (0, y)$$

Denotamos como $|| \hat{u} ||$ a la distancia del origen al punto (x, y) denominada magnitud del vector $\hat{u}$ y de donde obtenemos las siguientes conclusiones:

- $|| \hat{u} || = (x^2 + y^2)^{1/2}$
- $\cos(\theta) = x / || \hat{u} ||$
- $\text{Sen}(\theta) = y / || \hat{u} ||$

Para un vector anclado $\hat{u}$, $\hat{u}_x$ representa su componente en la dirección x, y $\hat{u}_y$ representa su componente en la dirección y.

La dirección de un vector de posición está dada por el ángulo que forma con el sentido positivo del eje X.

3. LA LÍNEA RECTA.

3.1. Concepto de Línea Recta.

Este concepto matemático parece no tener definición ya que es una **sucesión de puntos** y éstos carecen de magnitud, pero se considera como una **trayectoria de puntos que no cambian de dirección**, o bien, en términos del espacio, es la **intersección de dos planos**. Además tenemos los siguientes conceptos y que de igual forma ilustramos en la figura 3.1:

- **Segmento de recta:** Recta delimitada por dos puntos, ésta es una magnitud lineal finita.
- **Semirrecta:** Si se tiene una recta con un punto P contenido en ella y que la divide, cada una de las porciones en que queda dividida se le conoce como semirrecta.
- **Rayo:** Se le conoce como la semirrecta en un sentido, simbolizada como $\overrightarrow{AB}$ donde la flecha indica el sentido, el origen es A y el destino B , o bien por " r " con una flecha indicando el destino.

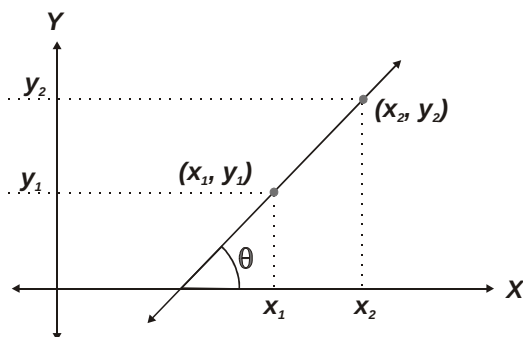


Figura 3.1.

3.2. Pendiente de una recta.

Uno de los elementos más importantes de la línea recta es la pendiente, la cual se define como **la tangente del ángulo de inclinación**. El ángulo de inclinación es aquel que forma la recta con el eje positivo de las X, véase la figura 3.1. Dados dos puntos por los cuales pasa la recta, su pendiente m se calcula así:

- $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$
- $m = \text{Tg}(\theta)$.
- $\text{Tg}(\theta) = y_2 / x_2 = y_1 / x_1$

3.3. Ecuación de la recta.

- Forma **intercepto-pendiente**: $y = mx + b$ (b es el intercepto con el eje Y).
- Conocidos la pendiente y un punto cualquiera (x_1, y_1) , la ecuación es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- Conocidos dos puntos la ecuación es:
 $y - y_1 = [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)](x - x_1)$.
- **Forma general de la ecuación de la recta**: La encontramos haciendo operaciones con cualquiera de las formas antes mencionadas, su representación es:
 $ax + by + c = 0$.

Definiciones.

- Se dice que **dos puntos son colineales** si están sobre la misma recta.
- Se dice que **dos rectas son perpendiculares** si el producto de sus pendientes es -1 .
- Se dice que **dos rectas son paralelas** si ambas tienen

la misma pendiente.

- La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $L = Ax + By + C = 0$ es:

$$d(P, L) = |Ax_1 + By_1 + C| / (A^2 + B^2)^{1/2}.$$

3.4. Forma simétrica de la ecuación de la recta.

La **forma simétrica de la ecuación de la recta** es $x/a + y/b = 1$ Donde a es el intercepto con x y b el intercepto con y .

3.5. Rectas y vectores.

En el plano cartesiano las rectas y los vectores se relacionan de la siguiente forma: Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces, ellos determinan una recta, justamente la que pasa por ambos, y su ecuación se encuentra de forma usual. Vistos los puntos como vectores $\hat{a} = (x_1, y_1)$ y $\hat{u} = (x_2, y_2)$, puede plantearse la siguiente pregunta: ¿Cuál es la recta que pasa por la punta del vector $\hat{a}$ en la dirección del vector $\hat{u}$? (recta L), con mayor precisión, observe en la figura 3.2 que $\hat{u} = \hat{a} + t\hat{h}$ que es la ecuación en forma vectorial de la recta L . Entonces podemos hacer las siguientes sustituciones:

$\hat{a} + t\hat{h} = (x_1 + tx_2, y_1 + ty_2) \Rightarrow x = x_1 + tx_2$, además, $y = y_1 + ty_2$ y podemos sustituir y despejar t para encontrar la ecuación de la recta en su forma general.

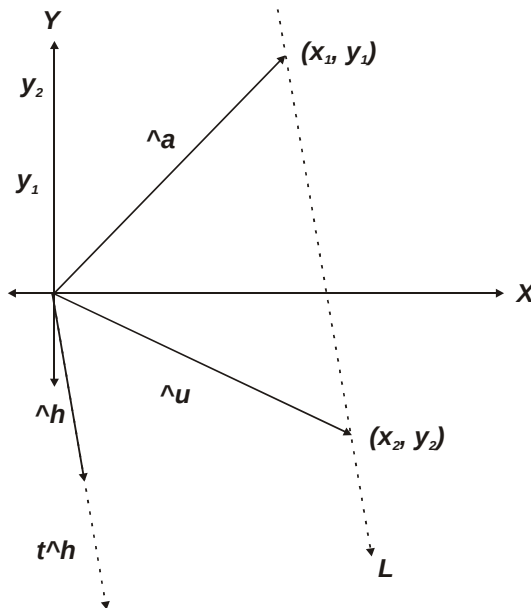


Figura 3.2.

Teorema:

La forma normal de la ecuación de una recta está dada por: $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$; donde p es un número positivo numéricamente igual a la longitud de la normal trazada desde el origen a la recta y θ es el ángulo positivo menor a 360° .

4. LA CIRCUNFERENCIA.

La circunferencia **es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano**; el punto fijo se llama centro y la distancia constante radio.

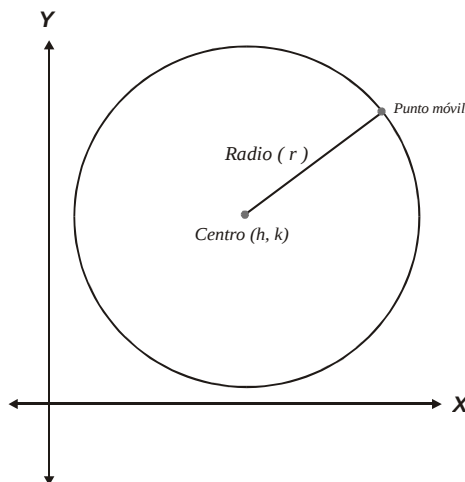


Figura 4.1.

La circunferencia cuyo centro es (h, k) y de radio r tiene por ecuación: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y recibe el nombre de **ecuación en forma ordinaria**.

4.1. Forma general de la ecuación de una circunferencia.

Dada la forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ desarrollamos los cuadrados y tenemos:

$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$; agrupamos términos — observe los términos subrayados—:

$$X^2 + y^2 + \frac{(-2h)x}{D} + \frac{(-2k)y}{E} + \frac{(h^2 + k^2 - r^2)}{F} = 0$$

Por último tenemos:

$X^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ que es la forma general que buscábamos.

De aquí deducimos que cualquier ecuación en forma ordinaria puede transformarse mediante operaciones correctas a la forma general.

4.2. Tangente a una circunferencia.

Dada la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria o general, hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que tiene dicha ecuación dados un punto de contacto, la pendiente de la recta buscada o un punto exterior por el cual pasa la recta tangente.

En geometría elemental se estudia únicamente la tangente a una curva: la circunferencia, el estudio hecho es insuficiente para las curvas planas en general, por ello, estudiaremos un método que se aplique a todas las curvas existentes en el siguiente apartado.

5. TANGENTE A UNA CURVA.

Dada la función $f(x, y)$ <1> y la recta, que es tangente a esa curva, $y = mx + b$, despejamos en la ecuación de la recta y la sustituimos en $f(x, y)$, después de esto nos debe quedar una ecuación de segundo grado, la cual hay que resolver con la siguiente condición: sabemos que la ecuación de segundo grado tiene un discriminante, en nuestro caso le llamaremos Δ y lo igualaremos a cero quedando de la forma $\Delta = 0$ y le llamaremos **condición de tangencia**.

En la expresión <1> hablamos de una función general en dos variables y nos referimos a funciones cuadráticas donde $y = mx + b$ representa una familia de rectas y el sistema pretende determinar cuál de esas rectas es tangente.

Resolviendo nos queda una ecuación de segundo grado, como lo habíamos dicho con anterioridad, para la variable x , y como estamos buscando una única solución se deduce que el discriminante tiene que ser igual a cero, es decir, estamos hablando de la condición de tangencia.

De manera práctica se encuentran tres casos de tangentes a cónicas.

1. Se conoce el punto de contacto, aquí hay una sola tangente.
2. Se conoce la pendiente, aquí hay dos tangentes.
3. Se conoce un punto exterior por el cual pasa la tangente, aquí hay dos tangentes.

Para hallar las ecuaciones de las tangentes se sustituye el dato conocido en la ecuación de la recta y se resuelve aplicando la condición de tangencia, determinando así la ecuación de las rectas.

6. LA PARÁBOLA.

Una parábola es el **lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija situada en el plano es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta**. Al punto fijo se le llama **foco** y la recta fija **directriz**.

La recta que es perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama **eje focal**, la intersección de la parábola con el eje focal se denomina **vértice**. La **cuerda focal** es el segmento de recta perpendicular al eje focal y que pasa por el foco, en la figura 6.1 esta es el lado recto.

Los elementos de una parábola son entonces: vértice, foco, longitud del lado recto, y la ecuación de la directriz. Nosotros estudiaremos únicamente las parábolas con ejes focales paralelos al eje X o al eje Y. La distancia del vértice a la directriz es la misma distancia del vértice al foco.

Teorema:

La ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje X es de la forma: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ y sus elementos son los siguientes:

- Foco: $(h + p, k)$
- Directriz: $x = h - p$
- Eje focal: $y = k$

Donde $4|p|$ es la magnitud del lado recto y siendo $|p|$ la longitud entre el foco y el vértice.

Si $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha.

Si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el eje es paralelo al eje Y la ecuación es de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ y sus elementos son:

- Foco: $(h, k + p)$
- Directriz: $y = k - p$
- Eje focal: $x = h$

Si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba.

Si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo.

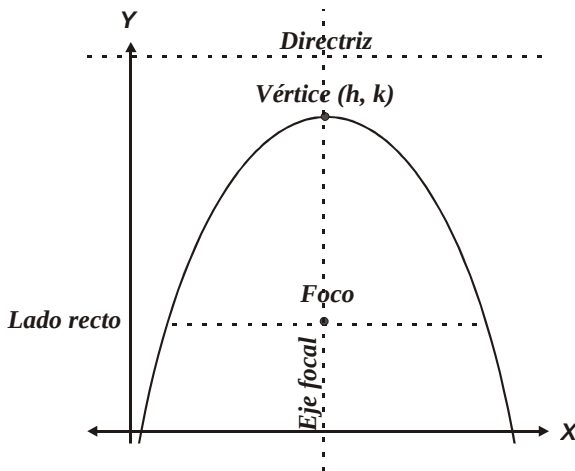


Figura 6.1.

7. LA ELIPSE.

Una elipse es el **lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que las sumas de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos.** Los dos puntos fijos se llaman **focos de la elipse**.

Los elementos de una elipse son los que se describen en la figura 7.1:

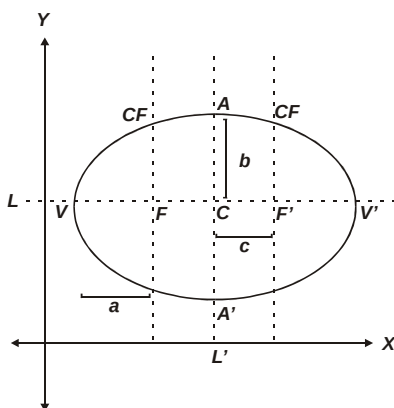


Figura 7.1.

- F y F', focos.
- V y V', vértices
- C, centro.
- $d(V, V')$, eje mayor.
- CF, lado recto.
- $d(A, A')$ eje menor.

- L' , eje normal.
- L , eje focal.

Es importante observar que F , F' , C , V y V' tienen una coordenada en común y que la distancia de F a V es igual a la distancia de F' a V' y que C es el punto medio de los focos y vértices.

Teorema:

La ecuación de una elipse con $C(h, k)$ y eje focal paralelo al eje X esta dada por: $(x - h)^2 / a^2 + (y - k)^2 / b^2 = 1$, y paralela al eje Y es: $(x - h)^2 / b^2 + (y - k)^2 / a^2 = 1$.

En donde para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, c es la distancia del centro hacia cada foco y a , b , c están ligadas por la siguiente relación: $a^2 = b^2 + c^2$.

También para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es: $2b^2 / a$ y la excentricidad $e = c / a$.

8. LA HIPÉRBOLA.

Una hipérbola es el **lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es igual a una constante positiva y menor que la distancia entre los focos**. Sus elementos son los que se muestran en la figura 8.1:

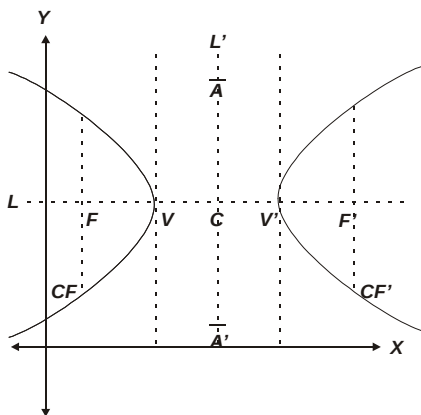


Figura 8.1.

- F y F' , focos.
- V y V' , vértices.
- L , eje focal.
- VV' , eje transverso.
- C , centro.
- L' , eje normal.
- AA' , eje conjugado.

- CF, lado recto.

Teorema:

La ecuación de una hipérbola con centro en el punto $C(h, k)$, y eje focal paralelo al eje X es de la forma:

$(x - h)^2 / a^2 - (y - k)^2 / b^2 = 1$, sus focos son $(h + c, k)$ y $(h - c, k)$ y sus vértices son $(h + a, k)$ y $(h - a, k)$.

Si el eje focal es paralelo al eje Y su ecuación es de la forma:
 $(y - k)^2 / a^2 - (x - h)^2 / b^2 = 1$, sus focos son $(h, k + c)$ y $(h, k - c)$ y sus vértices son $(h, k + a)$ y $(h, k - a)$.

Donde para cada parábola a es la longitud del semieje transversal, b la del semieje conjugado y c la distancia del centro a cada foco; a, b, c están ligadas por la relación $c^2 = a^2 + b^2$. También la longitud de cada lado recto es $2b^2 / a$ y la excentricidad está dada por la relación $e = c / a$.

9. ASÍNTOTAS.

Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a esa recta decrece continuamente y tiende a cero dicha curva se llama **asíntota de la curva**, la cual puede ser horizontal o vertical.

Teorema:

La hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ tiene por asíntotas las rectas: $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

10. SUBTANGENTE Y SUBNORMAL.

Primero veamos la figura 10.1:

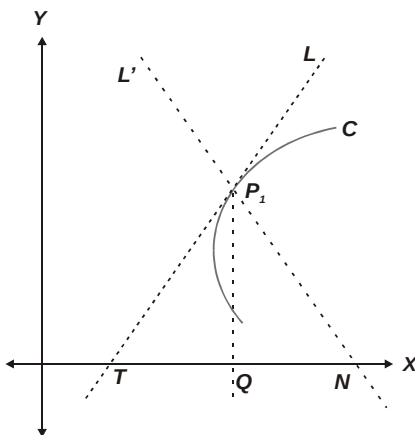


Figura 10.1.

Conforme a la figura 10.1 podemos afirmar lo siguiente:

- L es tangente a la curva C en el punto P_1 .
- L' es la recta trazada por P_1 perpendicular a L y se llama normal a C en P_1 . Su ecuación es $y - y_1 = -1/m(x - x_1)$.
- La tangente y la normal cortan al eje X en T y N .
- La longitud P_1T es la longitud de la tangente y P_1N es la longitud de la normal.
- La proyección QT de la longitud de la tangente sobre X se llama subtangente.
- La proyección QN de la longitud de la normal sobre X se llama subnormal.

Si m es la pendiente de una curva plana continua C en $P_1(x_1, y_1)$, entonces en P_1 tenemos:

- Ecuación de la tangente a C : $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- Ecuación de la normal a C : $y - y_1 = -1/m(x - x_1)$ con m diferente de 0.
- Longitud de la tangente: $y_1 / m (1 + m^2)^{1/2}$ con m diferente de 0.
- Longitud de la normal: $y_1(1 + m^2)^{1/2}$.
- Longitud de la subtangente: y_1 / m
- Longitud de la subnormal: my_1 .

11. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y representa alguna de las cónicas.

Teorema:

La ecuación general de segundo grado representa una cónica del género parábola, elipse o hipérbola según el indicador $I = B^2 - 4AC$ sea 0, negativo o positivo respectivamente.

12. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

Una **transformación** es una operación por la cual una **relación, expresión o figura se cambia por otra siguiendo una ley dada**. Analíticamente la ley se expresa mediante una o más ecuaciones llamadas **ecuaciones de transformación**.

12.1. Traslación de ejes de coordenadas.

Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo origen, O' es el punto (h, k) , y si las coordenadas de cualquier punto antes y después de la traslación son (x, y) y (x', y') respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son:

- $x = x' + h$
- $x' = x - h$
- $y = y' + k$
- $y' = y - k$

12.2. Rotación de ejes de coordenadas.

Si los ejes coordenados giran un ángulo θ en torno de su origen como centro de rotación y las coordenadas de un punto cualquiera P antes y después de la rotación son (x, y) y (x', y') respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema están dadas por:

- $x = x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta)$
- $y = x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta)$

13. COORDENADAS POLARES.

Veamos la figura 13.1:

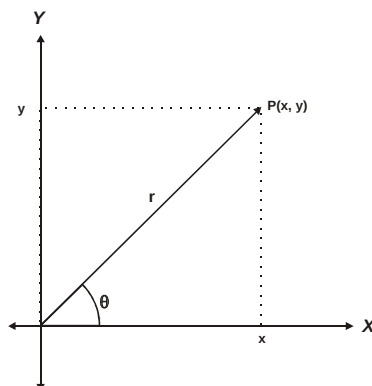


Figura 13.1.

De ella podemos decir que $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$, por tanto, podemos representar el punto $P(x, y)$ mediante otro sistema denominado **coordenadas polares** que toma en cuenta la magnitud r y el ángulo θ , así, el punto $P(x, y)$ lo podemos escribir como $P(r, \theta)$.

14. LUGAR GEOMÉTRICO.

El lugar geométrico lo podemos definir como el **conjunto de puntos y solo de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $f(x, y)=0$** , y además, cualquier punto que se mueve en el plano describe una curva. El hallar la ecuación de la curva y todas sus propiedades es un problema de lugar geométrico, donde se busca una expresión matemática que describa la situación.

14.1. Lugar geométrico de la recta en 3 dimensiones.

Dados dos puntos fijos, la recta se describe por aquellos puntos que se mueven a lo largo del vector que describe esos dos puntos en dirección contraria.

14.2. Ecuaciones paramétricas.

La recta queda determinada por un punto fijo P_0 y un vector $\hat{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, el conjunto de los puntos P , tales que P_0P es paralelo a $\hat{v}$, es decir, que satisfacen $d(P_0, P) = t\hat{v}$ para algún número real t .

Si $r = OP$ y $r_0 = OP_0$ son los vectores de posición de P y P_0 , respectivamente, entonces:

- $P_0P = t\hat{v}$
- $P_0P = r - r_0$
- $r = r_0 + t\hat{v}$

Si escribimos $r = (x, y, z)$ y $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e igualamos los componentes en $\langle 1 \rangle$ tenemos,

- $x = x_0 + at$
- $y = y_0 + bt$

- $z = z_0 + ct$

Y éstas se denominan ecuaciones paramétricas —véase la figura 14.1—.

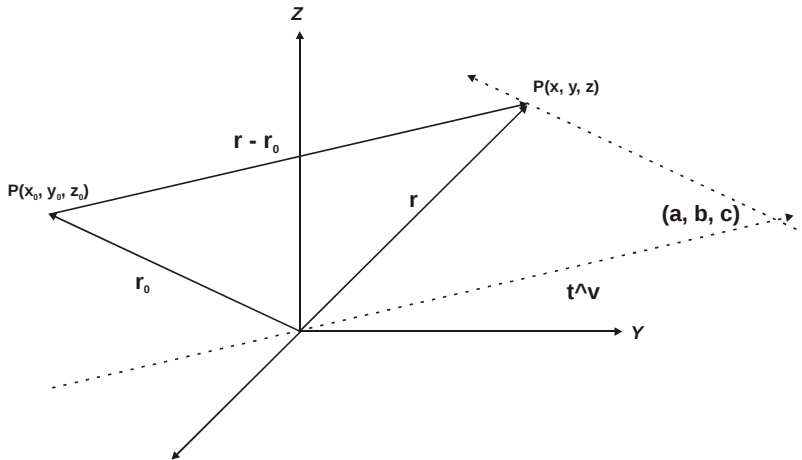


Figura 14.1.

Si despejamos t de las ecuaciones paramétricas obtenemos las ecuaciones simétricas o estándar:

$$(X - x_0) / a = (y - y_0) / b = (z - z_0) / c$$

15. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Para hallar la distancia de un punto $P(r, s)$ a una recta dada tenemos dos alternativas, calcularla mediante:

$$P(r, s) \text{ Recta } L: Ax + By + C = 0$$

$$d(P, L) = |Ar + Bs + C| / (A^2 + B^2)^{1/2} \quad <1>$$

Otra alternativa es calcularla de forma vectorial la cual está dada por:

$d(P, L) = | \vec{L} \times \vec{K} | / | \vec{L} |$, donde K y L son vectores determinados, aquí el procedimiento que se sigue es obtener los vectores K y L , realizar el producto vectorial por medio de determinantes y llegar a la fórmula <1>.

16. EL PLANO.

Primero definamos lo que es **producto cruz**, sean vectores $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3)$, entonces lo definimos por medio del cálculo del determinante siguiente:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Dicho determinante también es un elemento de $\mathbb{R}^3$.

Ahora, sí definimos al plano, **un plano en tres dimensiones es el lugar geométrico de los puntos, por los que un punto móvil se traslada de tal forma que el vector de él a un punto fijo de él es siempre perpendicular a un vector fijo llamado normal al plano.**

Consideremos la ecuación del plano como $Ax + By + Cz + D = 0$ con A, B, C no todas nulas.

Para dos vectores dados cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{w}$ su producto cruz ($\vec{v} \times \vec{w}$) es un vector perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ y sus números directores son los mismos que los de la normal al plano.

17. LA ESFERA.

El lugar geométrico de una esfera, es el lugar de un punto en el espacio que se mueve de tal manera que su distancia a un punto fijo es siempre constante. El punto fijo se llama centro y la distancia radio. Su ecuación es muy parecida a la de la circunferencia, esta es: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, donde r es el radio y (a, b, c) es el centro del cual hablamos.

En el caso de la circunferencia hablamos de recta tangente, pero en el caso de la esfera hablaremos del **plano tangente** a una esfera, el cual se obtiene buscando el vector que describe el centro con el punto de contacto y determinar la ecuación de la normal al plano.

La forma general de la ecuación de la esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

17.1.Coordenadas esféricas.

Es posible representar un punto en el espacio en otro sistema de coordenadas denominado coordenadas esféricas, el cual considera la distancia al origen y los ángulos que forma ese radio vector con los ejes X y Z , esto implica que el punto $P(x, y, z)$ puede escribirse como: $P(r, \alpha, \theta)$.

Teorema:

Las coordenadas rectangulares y esféricas de un punto en el espacio están ligadas por las relaciones:

- $x = r \text{Sen}(\alpha) \text{Cos}(\theta)$
- $y = r \text{Sen}(\alpha) \text{Sen}(\theta)$
- $z = r \text{Cos}(\alpha)$

18. SUPERFICIES.

Se llama superficie al **conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación del tipo $f(x, y, z) = 0$.**

Definición:

Se dice que **dos puntos distintos son simétricos con respecto a un plano si y solamente si el plano es perpendicular al segmento que los une en el punto medio.**

Definición:

Se dice que **una superficie es simétrica con respecto a un plano de simetría δ , si el simétrico de cada punto de la superficie respecto del plano δ es también un punto de la superficie.**

18.1.Construcción de una superficie.

Construir una superficie es muy complicado, por ello se han diseñado otras estrategias para hacer la tarea más fácil, lo cual contempla seguir los siguientes puntos en la construcción de cualquier superficie:

1) Verificar los interceptos con los ejes coordenados:

En las intercepciones con los ejes, los puntos tienen la forma en el plano X de $(x, 0, 0)$ en el plano Y de $(0, y, 0)$ en el plano Z de $(0, 0, z)$, que como pertenecen a la ecuación de la superficie, satisfacen la misma, y al hacerlo, podemos encontrar los valores de x, y, z .

2) Verificar las trazas:

Un razonamiento similar al de los interceptos nos lleva a encontrar las trazas de la superficie, que son las figuras que forma esa superficie cuando se intercepta con alguno de los ejes

coordenados, entonces aquí buscamos ecuaciones sencillas. Los puntos de las trazas en los planos correspondientes tienen la siguiente expresión: en el plano XY de $(x, y, 0)$ en el plano XZ de $(x, 0, z)$ y en el plano YZ de $(0, y, z)$, que como pertenecen también a la superficie, deben satisfacer su ecuación, por lo que al sustituir cada uno de estos puntos en la ecuación de la superficie se determina la curva correspondiente —la ecuación— de la traza en sus planos respectivos.

3) Verificar la simetría de la superficie.

Para verificar la simetría de una superficie nos ayudamos de la siguiente tabla que dice:

Tabla de simetría	
Si la ecuación de la superficie no se altera cuando las variables x, y, z son reemplazadas por:	La superficie es simétrica respecto al:
$-x, y, z$	Plano YZ
$x, -y, z$	Plano XZ
$x, y, -z$	Plano XY
$-x, -y, z$	Eje Z
$-x, y, -z$	Eje Y
$x, -y, -z$	Eje X
$-x, -y, -z$	Origen

4) Verificar secciones.

Para hacerlo, se trazan planos paralelos a la superficie para observar que curva se forma cuando se interceptan. Ahora los puntos toman la forma: en el plano $XY(x, y, k)$, $k = z$, en el plano $XZ(x, k, z)$, $k = y$, en el plano $YZ(k, y, z)$, $k = x$.

5) Definir la extensión de la superficie.

Simplemente se refiere al alcance que tiene la superficie, es decir, cuales son sus límites, si está definida dentro de un intervalo de valores para las variables o no, etcétera.

19. TEMA DE APLICACIÓN.

19.1. Construcción de volúmenes.

Por volumen entendemos una porción del espacio limitada por una o más superficies, si un volumen está limita solo por una superficie, tal como un elipsoide, dicho volumen puede representarse mediante la construcción de una superficie, si un volumen está limitado por una o más superficies, su construcción requiere la construcción de cada superficie que lo forma y de sus curvas de intersección, veamos dos ejemplos:

EJEMPLO 1.

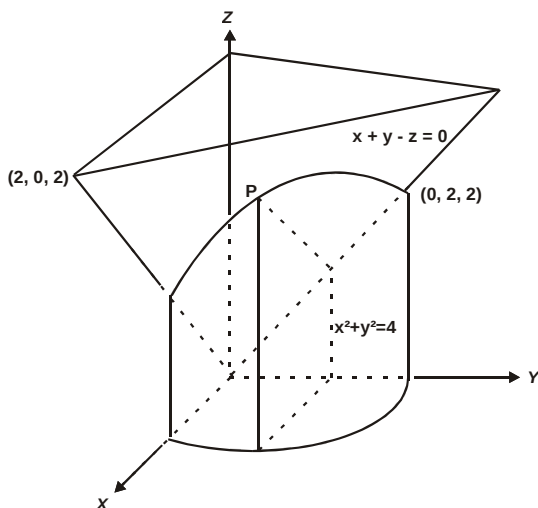
Construir el volumen limitado por las superficies:

- $x^2 + y^2 = 4$
- $x + y - z = 0$.

Solución:

La superficie que se desea está limitada por la superficie del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + y - z = 0$ y los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$.

Construimos primero una parte del cilindro en el primer octante. El plano $x + y - z = 0$ pasa por el origen y se puede construir mediante sus trazas sobre los planos XZ y YZ. Luego construimos la curva de intersección de este plano y el cilindro; para obtener cualquier punto P de esta curva, empleando un plano de corte paralelo al plano XZ, lo hacemos como indica la figura 19.1, el contorno del volumen aparece en la línea llena.

**Figura 19.1.****EJEMPLO 2.**

Construir el volumen limitado por las superficies:

- $x^2 + 2y = 4$
- $2y = 3z$
- $x - y + 1 = 0$
- $x = 0$ y $z = 0$

Y que está a la izquierda del plano $x - y + 1 = 0$.

Solución:

La porción de la curva de intersección del cilindro parabólico recto $x^2 + 2y = 4$ y el plano $2y = 3z$ aparece en la figura 19.2 por el arco AB. El plano $x - y + 1 = 0$ corta al arco AB en el punto D, al cilindro en la generatriz CD, al plano $2y = 3z$ en la recta DE y al eje

Y en el punto F, entonces el volumen requerido, que aparece en la línea gruesa, está limitado por las porciones ACD del cilindro. AOED del plano $2y = 3z$, CDEF del plano $x - y + 1 = 0$, OEF del plano $x = 0$ y AOFC del plano $z = 0$.

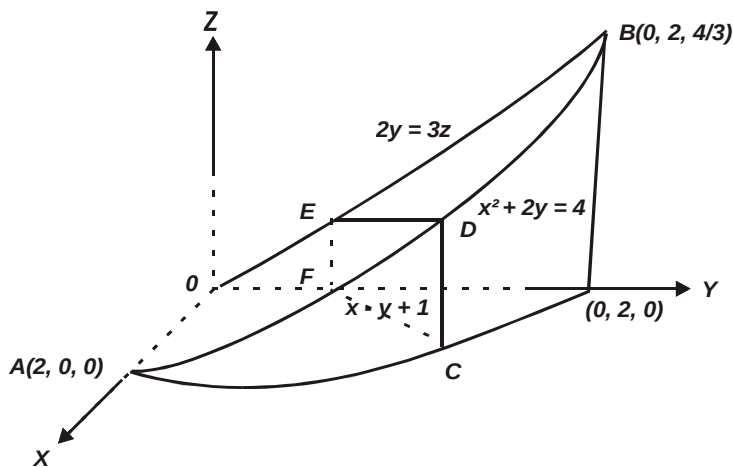


Figura 19.2.

20. REFERENCIAS.

1. Purcell Edwin J., Varberg Dale, Rigdon Steven E. (2001) Cálculo Octava Edición Pearson Educación, México.
2. Lehmann Charles H. (2003) Geometría Analítica, Limusa Noriega Editores, México.

PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ÁLGEBRA LINEAL

Guía básica para todos aquellos estudiantes de secundaria, preparatoria o universidades del área de ciencias naturales y exactas.

Se manejan conceptos como espacio vectorial, parábolas, elipses, coordenadas polares, entre otros.

Incluye temas de aplicación.

Segunda Edición

BUBOK.com