Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

1. El plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ pasa por el punto $A(-2,3,5)$ y tiene subespacio director $S = [(-4,3,5)(-2,3,5)]$.

   ¿Cuál(es) de los siguientes puntos pertenece al plano?

   $P_1 = (-8,3,10)$, $P_2 = (8,6,14)$, $P_3 = (-12,6,10)$.

2. Encuentre una ecuación parámetrica de la recta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos $(2,-1,3)$ y $(6,5,-1)$.

3. Encuentre una ecuación paramétrica del plano $3x - 2y + z - 12 = 0$, en $\mathbb{R}^3$.

4. Encuentre una ecuación vectorial de la recta en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} 3x + 2y - 7z - 4 &= 0 \\ x + y - 2z - 1 &= 0 \end{cases}$$

5. Encuentre las ecuaciones vectorial e implícita del plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos $A = (10,-1,0), B = (15,0,-1)$ y $C = (12,-1,-1)$.

6. Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x - 2y - 3 &= 0 \\ 3y - 2z + 7 &= 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}' : \begin{cases} x &= 6 - 5\lambda \\ y &= 3 - 4\lambda \\ z &= 5 - 3\lambda \end{cases}$$

   a) Demuestre que $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ es un punto; encuéntrelo.

   b) Encuentre una ecuación para el plano $\mathcal{P}$ que contiene a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.

7. Demuestre que los siguientes planos en $\mathbb{R}^3$ se cortan en un único punto. Encuentre dicho punto.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : x + 2y - z - 6 &= 0 \\ \mathcal{P}' : 2x - y + 3z + 13 &= 0 \\ \mathcal{P}'' : 3x - 2y + 3z + 16 &= 0 \end{aligned}$$

8. Encuentre la intersección del plano $\mathcal{P} : x - 12y - 10z - 5 = 0$ con la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x &= 4 + 3\lambda \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= 1 - \lambda \end{cases}$$

9. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ planos distintos en $\mathbb{R}^3$ y suponga que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$.

   Demuestre $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ es una recta.

Paralelismo de planos y rectas

10. En $\mathbb{R}^3$, determine si las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son paralelas:

    a) $\mathcal{L}: \begin{cases} x &= 2+\lambda \\ y &= -1+5\lambda \\ z &= 3-2\lambda \end{cases}$ $\quad \mathcal{L}': \begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= 2-5\lambda \\ z &= -1+2\lambda \end{cases}$

    b) $\mathcal{L}: \begin{cases} 2x+y-z-1 &= 0 \\ 3x+y+z+3 &= 0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{L}': \begin{cases} 5x+2y-11 &= 0 \\ 5x+3y-5z-4 &= 0 \end{cases}$

    c) $\mathcal{L}: \begin{cases} 2x+12y+z+4 &= 0 \\ x+9y+z+3 &= 0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{L}': (x,y,z) = (1,8,-2)+\lambda(3,-1,6)$

11. Sea $ax+by+cz+d=0$ la ecuación de un plano $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el subespacio director S de $\mathcal{P}$ está generado por los vectores $(b,-a,0)$ y $(c,0,-a)$ de $\mathbb{R}^3$.

12. En $\mathbb{R}^3$, considere los planos

    $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$, con subespacio director S.

    $\mathcal{P}': a'x+b'y+c'z+d'=0$, con subespacio director T.

    Suponiendo que $a'b'c' \neq 0$, demuestre que $S=T$ (es decir, los planos son paralelos), si y sólo si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. ¿Qué pasa si $a'b'c' = 0$?

13. Determine si los planos $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ en $\mathbb{R}^3$ son paralelos :

    a) $\mathcal{P}: 3x+2y-z+5=0$
    $\mathcal{P}': (x,y,z) = (1,8,-3)+\lambda(2,-3,0)+\mu(-1,0,-3)$

    b) $\mathcal{P}: x-6y+2z+1=0$ $\quad \mathcal{P}': \begin{cases} x &= -2+4\lambda-8\mu \\ y &= 3+\lambda-\mu \\ z &= -1+\lambda+\mu \end{cases}$

14. Determine si la recta $\mathcal{L}$ y el plano $\mathcal{P}$ son paralelos(Explique primero qué es lo que significa que una recta y un plano sean paralelos):

    a) $\mathcal{L}: \begin{cases} 2x+y-z-3 &= 0 \\ x-2y+3z+1 &= 0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{P}: 3x-y+2z+1=0$

    b) $\mathcal{L}: \begin{cases} x &= 3+\lambda \\ y &= -1+2\lambda \\ z &= 2-\lambda \end{cases}$ $\quad \mathcal{P}: 2x+3y+8z-24=0$

    c) $\mathcal{L}: \begin{cases} 3x+2y-7z-4 &= 0 \\ x+y-2z-1 &= 0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{P}: \begin{cases} x &= -4+2\lambda-5\mu \\ y &= 1+7\lambda-6\mu \\ z &= 3-3\lambda+2\mu \end{cases}$

15. Encuentre la ecuación de una recta que sea paralela al plano $\mathcal{P}$, contenga el punto $(4, 3, 18)$ y corte a la recta $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{P} : 3x - 2y + z - 10 = 0, \qquad \mathcal{L} : \begin{cases} x &= 2 + 3\lambda \\ y &= -1 - 2\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

16. Sea $\mathcal{L} : (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(3, -1, 2), A = (1, 3, 1), B = (1, 5, 2)$. Encuentre ecuaciones (vectorial e implícita) del plano $\mathcal{P}$ talque $A, B \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}//\mathcal{L}$.

17. Sean $\mathcal{L} : (x, y, z) = (1, 3, 2) + \lambda(-2, -5, 0), \mathcal{L}' : (x, y, z) = (7, 8, 9) + \mu(3, 0, -5)$ y $A = (1, -1, 1)$. Encuentre una ecuación del plano $\mathcal{P}$ tal que $A \in \mathcal{P}, \mathcal{L}//\mathcal{P}$ y $\mathcal{L}'//\mathcal{P}$.

Producto cruz

1. Sean $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (3, 4, 0)$. Calcule el área del triángulo ABC usando el producto cruz.

2. Sea $\mathcal{L}$ la recta determinada por los puntos B y C y sea A un punto fuera de $\mathcal{L}$. Demuestre que la distancia de A a $\mathcal{L}$ está dada por

$$d(A, \mathcal{L}) = \frac{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$$

3. Sean $v, w, u \in \mathbb{R}^3$. Demuestre

$$v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = u \cdot (v \times w)$$

4. Demuestre que $u \times v = -v \times u$.

5. Demuestre que u y v son linealmente dependientes si y sólo si $u \times v = 0$.

6. Demuestre que u, v y w son linealmente dependientes si y sólo si $u \cdot (v \times w) = 0$.

Planos y rectas ortogonales

7. Considere la recta $\mathcal{L} : \begin{cases} 3x + 2y - 7z - 4 &= 0 \\ x + y - 2z - 1 &= 0 \end{cases}$ y $P = (2, 1, 3)$. Encuentre la ecuación del plano $\mathcal{P}$ ortogonal a $\mathcal{L}$ y que pase por P.

8. Sea $P = (2, -6, -3)$ y $\mathcal{L} : (x, y, z) = (-1, 1, 2) + \lambda(2, 1, -3)$. Encuentre la proyección ortogonal Q de P sobre $\mathcal{L}$ y calcule la distancia de P a $\mathcal{L}$.

9. Considere el plano $\mathcal{P} : 6x + 2y + 3z + 22 = 0$ y $A = (4, 3, -1)$. Encuentre la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por A y es ortogonal a $\mathcal{P}$. Calcule la distancia de A a $\mathcal{P}$ y encuentre la proyección de A sobre $\mathcal{P}$.

10. Sean las rectas

$$\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 12y + z + 4 & = & 0 \\ x + 9y + z + 3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \mathcal{L}' : (x, y, z) = (-2, -\frac{1}{3}, 1) + \lambda(3, -1, 6)$$

Calcule la distancia entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.

11. Sean $\mathcal{P} : 2x + 3y + 8z - 24 = 0$ y $\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 + \lambda \\ y & = & -1 + 2\lambda \\ z & = & 2 - \lambda \end{array} \right.$

Calcule la distancia entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$.

12. Encuentre la distancia entre los planos

$$\mathcal{P} : 2x - y + z - 8 = 0 \qquad \mathcal{P}' : 4x - 2y + 2z + 24 = 0$$

13. Sean $\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + 3 & = & 0 \\ y - 3z - 13 & = & 0 \end{array} \right.$ $\quad \mathcal{L}' : \left\{ \begin{array}{rcl} 6x - y - 21 & = & 0 \\ y + z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$

Encuentre la ecuación de una recta $\mathcal{L}_1$, ortogonal a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, que contenga al punto $(-2, 1, -4)$.

14. Sean $\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 3\lambda \\ y & = & -5 - 6\lambda \\ z & = & -6 - 2\lambda \end{array} \right.$ $\quad \mathcal{L}' : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 + \mu \\ y & = & -3 + 6\mu \\ z & = & 5 - 6\mu \end{array} \right.$

Encuentre la ecuación de una recta $\mathcal{L}_1$, ortogonal a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ y que corte a ambas. Encuentre los puntos de intersección de $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}$y $\mathcal{L}'$ y calcule la distancia entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.

15. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos:

    i) $\mathcal{P} : x + 3y - 2z + 5 = 0 \quad \mathcal{P}' : 2x + z - 15 = 0$.
    ii) $\mathcal{P} : (2\sqrt{2} + 3)x + \sqrt{2}y + (2\sqrt{2} - 3)z + 1 = 0, \mathcal{P}' : 2x + y + 2z - 5 = 0$

16. Encuentre el ángulo entre las rectas

$$\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 + (2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})\lambda \\ y & = & 1 - \sqrt{2}\lambda \\ z & = & 0 + (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})\lambda \end{array} \right. \quad \mathcal{L}' \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 1 & = & 0 \\ 2y + z - 7 & = & 0 \end{array} \right.$$