Ejercicios Algebra y Geometría II

Vectores y rectas en $\mathbb{R}^2$

1. ¿Para qué valor(es) de x es linealmente dependiente cada uno de los siguientes conjuntos?

   a) $\{\binom{x}{1}, \binom{4}{2}\}$ *b*) $\{\binom{x}{x^2}, \binom{-3}{9}\}$ *c*) $\{\binom{x}{1}, \binom{9}{x}\}$ *d*) $\{\binom{x}{x^2}, \binom{1}{x}\}$

2. Demuestre que $\{(a,b),(c,d)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $ad - bc \neq 0$.
3. Demuestre que $(-1,11)$ es una combinación lineal de $\{(1,3),(-2,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$.
4. Determine si las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, son paralelas.

   $$\mathcal{L} : 3x + y + 9 = 0 \qquad \mathcal{L}' : \begin{cases} x &= 2 - 2\lambda \\ y &= -1 + 6\lambda \end{cases}$$

5. Encuentre la recta $\mathcal{L}'$ que contiene al punto $(3,-1)$ y es paralela a $\mathcal{L} : 2x-5y+4 = 0$
6. Encuentre la ecuación de la recta $\mathcal{L}'$ que contiene al punto $(2,3)$ y es paralela a la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $A = (-6,1)$ y $B = (1,-4)$.
7. Considere el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(3,3)$ y $C(-3,5)$ encuentre:

   a) Las coordenadas del ortocentro (punto de intersección de las alturas).

   b) Las coordenadas del baricentro (punto de intersección de las transversales de gravedad).

   c) El área del triángulo.

   d) El seno del ángulo en A.

8. Determine el ángulo entre los vectores dados $\binom{2}{2}$ y $\binom{0}{3}$ $\binom{3}{1}$ y $\binom{-1}{-2}$
9. Encuentre la proyección del primer vector en la recta generada por el segundo:

   a) $\binom{-1}{2}$ y $\binom{3}{1}$ *b*) $\binom{3}{1}$ y $\binom{1}{2}$ *c*) $\binom{3}{1}$ y $\binom{-2}{6}$

10. Si $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ¿cuáles de las siguientes son siempre verdaderas? Algunas podrían ni tener sentido. Justifique sus respuestas.

    a) $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$

    b) $\alpha(v \cdot w) = v \cdot (\alpha w)$

    c) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

    d) $u \cdot v + w = u \cdot w + v$

    e) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

    f) $(u + v)\alpha = \alpha u + \alpha v$

    g) $\dfrac{u \cdot v}{u} = v$

    h) $u \cdot v = 0 \Rightarrow u = 0$ ó $v = 0$

    i) $\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ó $v = 0$

    j) $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot (\alpha v)$

Vectores, independencia lineal, bases

1. Sean $v_1 = (1,1,1), v_2 = (3,1,0), v_3 = (2,0,-1)$ en $\mathbb{R}^3$.

   - ¿ Es $(1,3,4)$ una combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$?
   - ¿ Es $(5,3,1)$ una combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$?
   - ¿ Es v_3 una combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$?
   - ¿ Es $\{v_1, v_2, v_3\}$ linealmente independiente?.

2. Sean v_1, v_2, v_3 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y sean $w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_2 + v_3, w_3 = v_3 + v_1$. Demuestre que w_1, w_2, w_3 son linealmente independientes.

3. Demuestre que cada uno de los conjuntos siguientes es un subespacio de $\mathbb{R}^3$:

   a) $S_2 = \{(x,y,z) | x + 2y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   b) $S_3 = \{(x,y,z) | x - y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   c) $S_2 + S_3$.

   d) $S_2 \cap S_3$.

4. Encuentre una base para cada uno de los subespacios del ejercicio 3.

5. Sean $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,0,2)$, $v_3 = (3,1,2)$ y $v_4 = (0,1,1)$. Encuentre los valores de i tales que v_i sea combinación lineal de $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

6. Sean $S = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle, T = \langle (2,3,1), (1,3,2) \rangle$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $S = T$. Describa geométricamente.

7. Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga los vectores $(1,1,0)$ y $(2,3,1)$.

8. Considere el conjunto $S = \{(1,2,0), (-3,-7,-1), (0,-2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Demuestre que S es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcule las coordenadas en esa base de un vector arbitrario (a,b,c).

9. Demuestre que dados los vectores $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, alguno de ellos es combinación lineal de los otros dos si y solamente si existen escalares $r, s, t \in \mathbb{R}$ no todos nulos de manera que $rA + sB + tC = 0$.